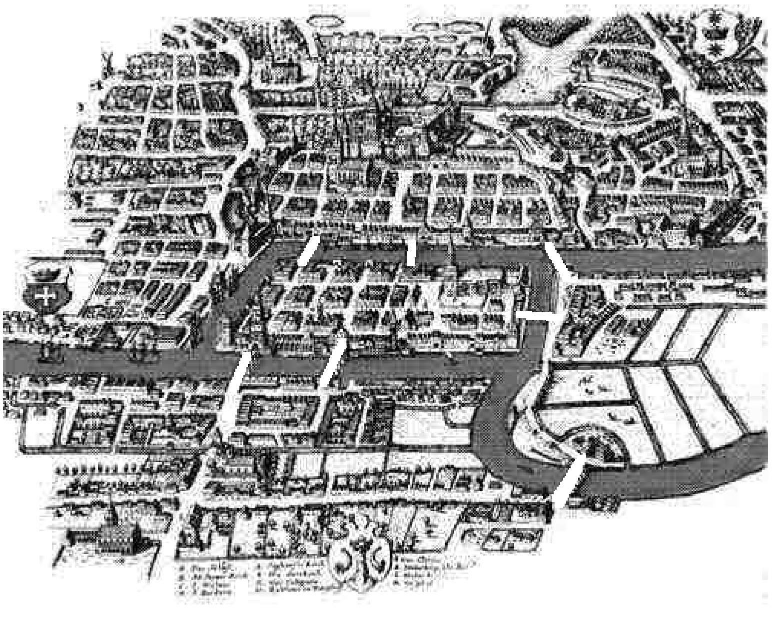
第1章　オイラーの仕事

幾何学の分野の一つに位相幾何学（トポロジー topology）と呼ばれているものがある. 図形を連続的に伸ばしたり縮めたり曲げたりしても変らない性質を調べる分野であるが, このような考えは 18 世紀の数学者オイラーの画期的な仕事から生まれた.

§1.1　ケーニヒスベルグの橋の問題

位相幾何学は英語でトポロジー topology といい, ギリシア語のトポス（位置 topos）とロゴス（学問 logos）という言葉に由来する. それは距離という考え方にとらわれず, **点**の位置関係を考え, 同じ位置関係をもつ図形が共通に持っている性質（それを**位相不変量**という）を調べる幾何学である. このようなまったく新しい数学の分野の先駆者はオイラー（Leonhard Euler, 1707.4.15〜1783.9.18）であり,1736 年の論文「位置の幾何学に関する問題の解決」が出発点である. 当時, ケーニヒスベルグという町で話題になっていた「ケーニヒスベルグの橋の問題＝ある地点から出発して７つの橋を一度だけ必ず渡って元の地点に戻ることができるか」が発端となっている.



この問題に対してオイラーは,「点と, それらの点を結ぶ線の位置関係がこの問題の本質である. 橋と橋の間の距離は重要でなく, また, 進む道がまっすぐであるか曲がっているかも重要でなく, 点と線だけの簡略化した図形を考え, そしてこれが**一筆書き可能**かどうか」と考え, 解決したのである. その考えをたどってみよう.

次の図 (1) のように川で隔てられた４つの地区があり, それらが７本の線で結ばれているが, それぞれの地区の中ではどのように動いても問題ではないのだから, 各地区を点で表してみよう. すると (2) のような図が考えられる.

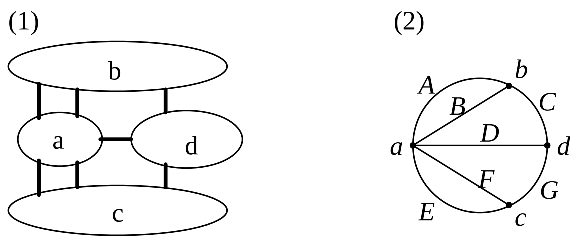
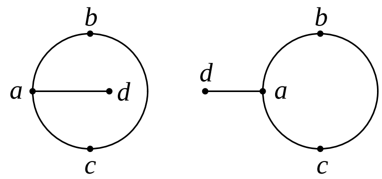


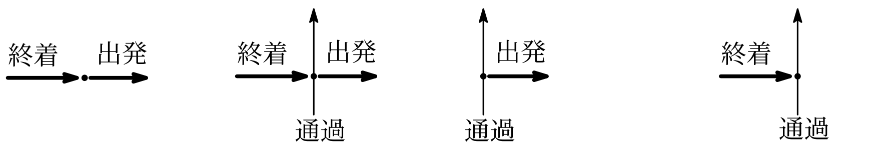
図 (2) では, 必ず通らなければならない線は $A \sim G$ の７つであり, 他の４つの線はなくても良いものだから, 最終的には図 (3) に簡略化することができる. このような図形について「一筆書き可能かどうか」を議論すればよい. これからは点と線をそれぞれ**頂点**, **辺**と呼ぶことにする. なお, 辺は必ず頂点と頂点を結ぶものとし, また, 平面上でグラフを考えているとき辺と辺が重なるところには必ず頂点があるとする.

【定義 1.1】平面 $\mathbb{R}^2$ 上の（または空間 $\mathbb{R}^3$ 内の）図形で, 有限個の頂点と辺からなる図形を**グラフ**という. 辺は互いに重ならず, 直線でも曲線でもよいとする. 任意の２頂点を結ぶ辺があるとき, そのグラフは**連結**であるという. 各頂点について, その点を端点とする辺の数が偶数のとき, その頂点を**偶点**といい, 奇数のときは**奇点**という.

右図の２つのグラフはまったく同じものである. 現実の問題の場合には３つの頂点 a, b, c に抽象化された地点で囲まれた区域があり, 頂点 d に当る地点がその区域の中にある状態と区域の外にある状態は別であると考えなければならないかもしれないが, 数学的に抽象化されたグラフの場合には区別されない.

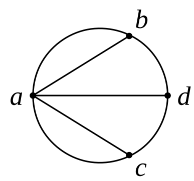


偶点と奇点の違いを考えると, 次の図のようになることがわかる. 通過する辺がもっと多くあっても, 偶点か奇点かということには変わりない.



(1) 偶点　通過辺なし　(2) 偶点　通過辺あり　(3) 奇点　ここから出発　(4) 奇点　ここに終着

一筆書き可能なグラフは, まず連結でなければならず, 次に出発点と終着点はそれぞれ１つずつでなければならない. 偶点はいくつあってもよいが, 奇点が３つ以上ある場合や奇点が一つだけの場合は一筆書き不可能であることがわかる. オイラーが示した結論は次の定理 1.1 である. ケーニヒスベルグの橋の問題をグラフ化した右図の場合, 連結であるが, 偶点はなく, 奇点が４つあるので, この定理により一筆書き不可能である.



〖**定理 1.1**〗グラフが一筆書き可能であるための必要十分条件は「連結」かつ「奇点の個数が 0 または 2」であることである.

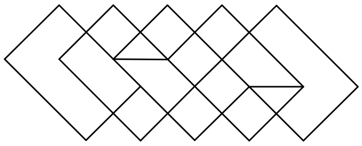
一筆書き可能なグラフがあるとき, 実際に一筆書きの経路を示すには, もし偶点ばかりならば, どの点から出発してもよく, ほかの点はすべて通過点となり, 最後に出発点に戻ることで完了する. ２つの奇点がある場合には, 一方の奇点から出発し, 他方の奇点に終着するように道をたどればよい.

すべての頂点が偶点であるとき, そのグラフを**オイラーグラフ** *Eulerian graph* といい, ある頂点から出発してすべての辺を通って元の頂点に戻ってくる経路を**オイラー閉路** *Eulerian circuit* という.

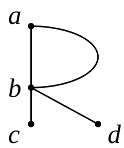
また２つの奇点があるグラフは**準オイラーグラフ**または**半オイラーグラフ** *semi-Eulerian graph* といい, 一筆書き可能な経路を**オイラー路** *Eulerian trail* という. 出発点と終着点が一致する場合に**閉路**というが, 準オイラーグラフの場合は一筆書き可能な閉路は存在しない.

オイラーの発想を源として**グラフ理論**と呼ばれる専門分野が切り開かれ, それが数学以外の広い分野で応用され役立っている.

問 1.1 右のグラフについて, オイラーグラフかどうか調べよ. 一筆書き可能ならばその経路を示せ. 辺が交差するところはすべて頂点とする.



問 1.2 一般にグラフ内の各頂点に対してその点に接合する辺の数を**次数**といい, $\deg(a)$ のように表す. たとえば右のグラフでは



$$\deg(a) = 2, \quad \deg(b) = 4, \quad \deg(c) = 1, \quad \deg(d) = 1$$

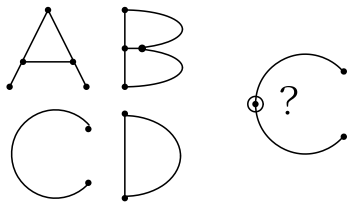
である. 下記のように飾りのないシンプルなアルファベット文字について, 頂点の個数を調べ, 各頂点の次数を考え, グループ分けしてみよう.

A B C D E F G H I J K L M

N O P Q R S T U V W X Y Z

すると, 次数別に頂点の数をしらべてみると次の表のようにまとめられる.

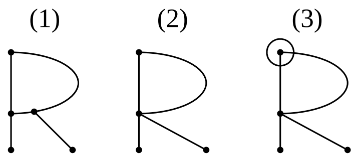
次数	1	2	3	4	···	合計　( ) の数は次数 2 の頂点を除いた数
A	2	1	2	0		5　(4)
B	0	2	2	0		4　(2)
C	2	0	0	0		2　(2)
D	0	2	0	0		2　(0)



次数 2 の頂点は,「C」や「D」のように丸みのある文字の場合, 右図のように◯で囲まれた頂点が必要なのか意見が分かれること, また一筆書きする場合には単なる通過点であることから除外して考えることにする.

ただし「R」の書き方については, 右の (1) と (2) のように異なるグラフが考えられるので注意しよう. 同じことは「K」についても言える.

どちらにしても上で述べたように右図 (3) の◯で囲まれた頂点は除外しよう.



さらに, アルファベットには次数が 5 以上の頂点をもつ文字はないこと, 一筆書き可能かどうかを追加して分類してみよう. 残りのアルファベット E から Z まですべてを調べ, 次の表を完成せよ.

次数	1	3	4	文　字	一筆書き
A グループ	2	2	0	A	不可
B グループ	0	2	0	B	可
C グループ	2	0	0	C	可
D グループ	0	0	0	D	可