§2.3　位相同型

【定義 2.10】 写像 $\varphi : A \to B$ について,

$$\forall a,b \in A \text{ に対して} \quad a \neq b \ \Rightarrow \ \varphi(a) \neq \varphi(b)$$

が成り立つとき, φ を**単射** *injection* または**１対１** *one to one* の写像という. 一般に $\varphi(A) \subset B$ であるが, 特に $\varphi(A) = B$ のとき φ を**全射** *surjection* または**上への**写像 *onto mapping* という. さらに単射であり, かつ全射であるものを**全単射** *bijection* という.

写像 $\varphi : X \to Y$ が全単射ならば, $\varphi(x) \in Y$ に対して $x \in X$ を対応させる写像が得られる. これを**逆写像**といい $\varphi^{-1} : Y \to X$ と表す.

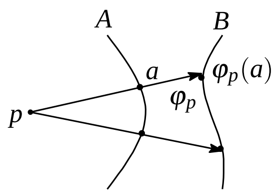
【定義 2.11】 位相空間 $X = (X, \mathscr{A}), Y = (Y, \mathscr{B})$ に対して, 次の条件を満たす写像 $\varphi : X \to Y$ があるとき, X と Y は**位相同型**または**同相** *homeomorphic* といい, $X \approx Y$ と表す. このとき φ を**同相写像** *homeomorphism* という.

H1 :　φ は連続な全単射

H2 :　逆写像 $\varphi^{-1} : Y \to X$ も連続

同相関係を $X \cong Y$ または $X \sim Y$ と表す本もあるが, このテキストでは $X \approx Y$ と表す.

【定義 2.12】 $\mathbb{R}^2$ 上の曲線 A, B があるとき, 定点 p をとり, 右図のように基点 p から放射線状に点を対応させる写像 $\varphi_p : A \to B$ を**ステレオグラフ射影** *stereographic projection* または簡単に**ステレオ射影**という.

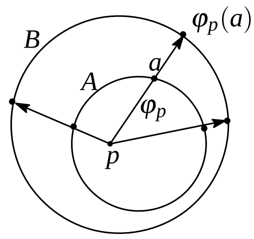


曲線を $(\mathbb{R}^2, \mathscr{O})$ の部分空間と考えるとき, 例 2.9 で考えたように, その開集合は曲線上のいくつかの開区間から成るものだからステレオ射影は連続である. さらに次の重要なことがわかる.

〘**定理 2.2**〙 全単射なステレオ射影は同相写像である.

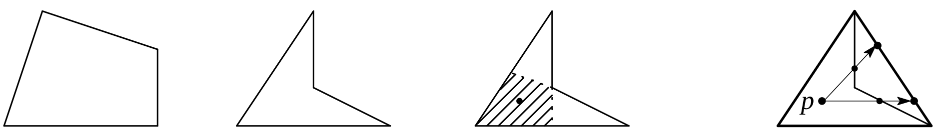
ステレオ射影は, 曲線を「曲げたり, 伸ばしたり, 縮めたりする操作」を考えるとき, 重要な役割をはたす. また, ３次元空間内においても同様にステレオ射影を考えることができる.

例 2.13　A, B はともに円周とし, 右図のように B の内部に A があるとする. A の内部に基点 p をとると, ステレオ射影 $\varphi_p : A \to B$ は連続な全単射であり, したがって $A \approx B$ である.



A が任意の三角形の場合でも, A の内部に基点 p をとって考えると, $A \approx B$ であることが分かる.

A が４つ以上の頂点をもつ多角形の場合に同様のことを考えるときは注意が必要である. たとえば四角形の場合, 下図 (1) のように凸の形（すべての頂点の内角が 180° 未満）ならば, 例 2.13 と同様に連続な全単射 $\varphi : A \to B$ を考えることができるが, 下図 (2) のように凸でない場合には基点 p の位置は限定される. 図 (3) のように基点を斜線部内にとらなければ１対１にならないからである.



(1) 凸の場合　(2) 凸でない場合　(3) 基点の位置　(4) 凸多角形へステレオ射影

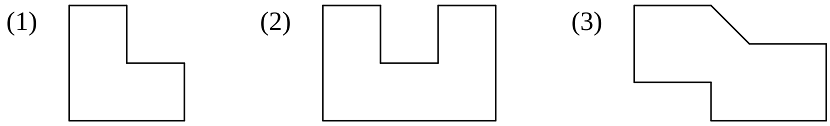
あるいはいくつかのステレオ射影を合成するという方法も考えられる. たとえば図 (2) の A に対して, 内角が 180° を超える頂点に結ばれる２辺の延長線を引き, 上図 (3) のようにステレオ射影の基点をとるべき範

囲（斜線部分）を定め, 図 (4) のように凹んでいる 2 つの辺を解消する. こうして凸多角形 A' への連続な全単射を考えたあと A' から円周 B への連続な全単射を合成すれば, 図 (2) のような凸でない A から円周 B への連続な全単射が得られる.

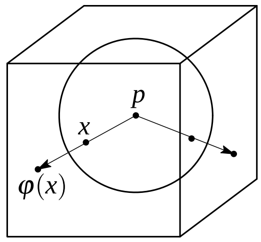
さらに, 内角が 180° を超える頂点が複数個あるような多角形の場合には, 凹んだ部分を解消するステレオ射影をいくつか繰り返し考え, それらを合成すればよい. したがって, A は任意の n 角形, B は円周とすると き, 連続な全単射 $\varphi : A \to B$ があることがわかり, 次の結果が得られる.

〖**定理 2.3**〗平面上の任意の多角形は円周と同相である.

問 2.12 A は下図のような図形とし, B は円周とする. 連続な全単射 $\varphi : A \to B$ があることを示せ.

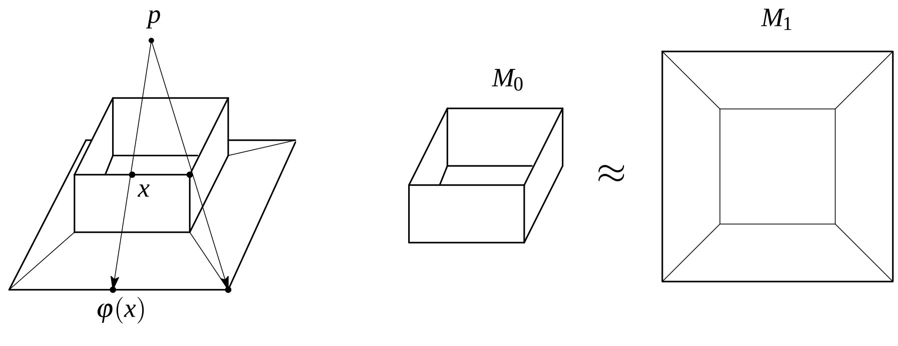


これは $\mathbb{R}^2$ 内の図形だけでなく, $\mathbb{R}^3$ 内の図形についても同様であり, 有限個の面からなる任意の多面体 M は球面と同相である. また, 多面体の面は平面でなく曲面になっているような立体でも同様である.



例 2.14 $\mathbb{R}^3$ 内の球面と 6 面体は同相である. 右図のように, 球面上の点 x に対して 6 面体上の点 $\varphi(x)$ を対応させる全単射なステレオ射影 φ を考えることができるからである.

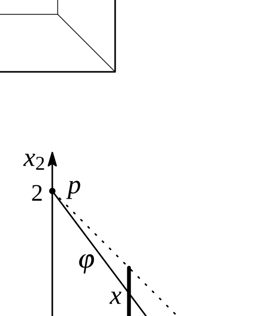
さらに $\mathbb{R}^3$ 内の図形と $\mathbb{R}^2$ 内の図形の間についても, 定理 2.2 は通用する. たとえば, 下図左のようなステレオ射影 $\varphi : M_0 \to M_1$ を考えるとき, 基点 p の位置を適当にとることで全単射とすることができ, $M_0 \approx M_1$ となる. このようにして, 立体的な図形 M_0 に関する問題を平面的な図形 M_1 の問題におきかえて考えることができるメリットは大きい.



問 2.13 M_0 と M_1 は $\mathbb{R}^2$ 上の部分空間で $M_0 = I_1 \cup I_2$ であり,

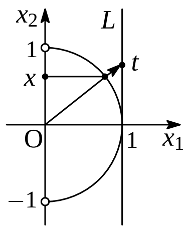
$$I_1 = \left\{ (x_1, 0) \,\middle|\, 0 \leq x_1 \leq 1 \right\}, \quad I_2 = \left\{ (1, x_2) \,\middle|\, 0 \leq x_2 \leq 1 \right\}$$

また $M_1 = \left\{ (x_1, 0) \,\middle|\, 0 \leq x_1 \leq 2 \right\}$ とする. 点 $p(0,2)$ を基点とするステレオ射影 $\varphi : M_0 \to M_1$ を考え, $x(x_1, x_2) \in M_0$ に対して $t = \varphi(x) \in M_1$ とおくとき, $\varphi(x) \in M_1$ の式を求めよ. φ は全単射であり, $M_0 \approx M_1$ となる.



問 2.14 前問はアルファベット文字について「L≈I」の説明にもなる. ただし厳密に数式で表さなくても, 図形を曲げたり伸ばしたりする全単射なステレオ射影を直感的に考えることができるならば, 同相関係は保たれるとする. 右図では「A≈R」を示している. そのような変形によって飾りのない単純なアルファベット文字を同相関係でグループ分けせよ. それは問 1.2 で考えたものと同じ結果になるか.

例 2.15　開区間 $I=(-1,1)$ は 1 次元空間 $\mathbb{R}^1$ と同相である.



解　まず区間 I を右図のように x_2 軸上にとり, $\mathbb{R}^1$ は直線 L とする. 点 $x\in I$ に対して, 直線 $x_2=x$ と単位半円との交点をとり, 右図のように原点を基点とするステレオ射影 φ を考えると, φ は全単射なので, $I\approx\mathbb{R}^1$ となる. 具体的に式で示すと

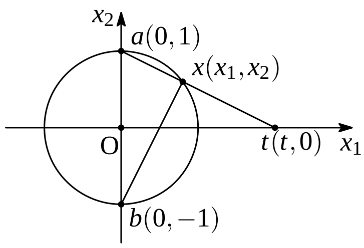
$$\varphi(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\qquad \varphi^{-1}(t)=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

と書くことができる.

問 2.15　上の解をきちんと確かめよ.

例 2.16　2 次元空間 $\mathbb{R}^2$ で単位円周 $S^1=\left\{\, x\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x_1)^2+(x_2)^2=1 \,\right\}$ を考え, a は S^1 上の 1 点とするとき, $S^1\setminus\{a\}\approx\mathbb{R}$ である.

解　右図のように S^1 上の点 $a(0,1)$ を基点とするステレオ射影 $\varphi: S^1\setminus\{a\}\to\mathbb{R}$ を, 2 点 a と $x\in S^1\setminus\{a\}$ を通る直線が x_1 軸と交わる座標を $\varphi(x)=t$ と定めると φ は全単射であり, 以下のように $\varphi(x)$ と $\varphi^{-1}(t)$ が連続な関数式で表すことができる.



相似な三角形 axb と $a\mathrm{O}t$ の辺の比 $at:\mathrm{O}a=ab:ax$ より, $at:1=2:ax$ である. すなわち $at\cdot ax=2$ であり, この関係式が鍵となる.

$$\overrightarrow{at}=\frac{at}{ax}\overrightarrow{ax}=\frac{at\cdot ax}{ax^2}\overrightarrow{ax}=\frac{2}{ax^2}\overrightarrow{ax}$$

となり, ベクトルの成分で表すと

$$\begin{pmatrix} t\\ 1\end{pmatrix}=\frac{2}{{x_1}^2+(x_2-1)^2}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2-1\end{pmatrix}$$

ここから $t=\dfrac{x_1}{1-x_2}$ が得られる.

逆写像は, $\overrightarrow{ax}=\dfrac{ax}{at}\overrightarrow{at}=\dfrac{ax\cdot at}{at^2}\overrightarrow{at}=\dfrac{2}{at^2}\overrightarrow{at}$ より $\begin{pmatrix} x_1\\ x_2-1\end{pmatrix}=\dfrac{2}{t^2+1}\begin{pmatrix} t\\ -1\end{pmatrix}$ だから $x_1=\dfrac{2t}{t^2+1}$

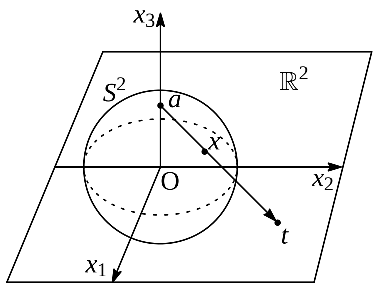
また $x_2-1=\dfrac{-2}{t^2+1}$ より $x_2=\dfrac{-2}{t^2+1}+1=\dfrac{t^2-1}{t^2+1}$ となる.　//

☞ 数直線 $\mathbb{R}$ 上の任意の開区間 I について, $I\approx S^1\setminus\{a\}$ だから $I\approx\mathbb{R}$ であることが例 2.15 とは別の方法で示すことができる.

問 2.16　3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ で単位球面を S^2 とおく. すなわち

$$S^2=\left\{\, x\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; (x_1)^2+(x_2)^2+(x_3)^2=1 \,\right\}$$

である. S^2 上の 1 点 $a(0,0,1)$ をとり, 上の例 2.16 と同様に図のようなスレレオ射影 $\varphi: S^2\setminus\{a\}\to\mathbb{R}^2$ を考えると以下の関係式が得られ, $S^2\setminus\{a\}\approx\mathbb{R}^2$ であることを確かめよ.

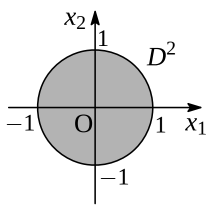


(1) $t_1=\dfrac{x_1}{1-x_3}$,　$t_2=\dfrac{x_2}{1-x_3}$

(2) $x_1=\dfrac{2t_1}{{t_1}^2+{t_2}^2+1}$,　$x_2=\dfrac{2t_2}{{t_1}^2+{t_2}^2+1}$,　$x_3=\dfrac{{t_1}^2+{t_2}^2-1}{{t_1}^2+{t_2}^2+1}$

境界線だけの図形でなく, その内部を含めた図形についてもステレオ射影を用いた位相同型の議論が通用することを考えよう. その準備として右図の集合

$$D^2=\left\{\, x\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x_1)^2+(x_2)^2\le 1 \,\right\}$$



を**単位円盤**といい, 単位円盤から境界を除いた部分

$$D_o^2=\left\{\, x\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x_1)^2+(x_2)^2<1 \,\right\}$$

を**単位開円盤**ということにしよう.

〖**定理 2.4**〗 任意の実数 $r>0$ に対して, 原点を中心とし半径 r の円盤を $\overline{B_r}$ とし, また境界を除いた内部を B_r とするとき次の関係が成り立つ.

(1) $\overline{B_r} \approx D^2$ (2) $B_r \approx D_o^2 \approx \mathbb{R}^2$

証明 (1) 点 $x\,(x_1,x_2)$ に対して $rx\,(rx_1,rx_2)$ とするとき, 写像 $\varphi : D^2 \to \overline{B_r}$ を

$$\varphi(x) = rx \qquad \forall x \in D^2$$

と定めれば, φ は連続な全単射であり, 同相写像になるからである.
(2) 任意の $x \in B_r$ に対して $s = \dfrac{r}{r-d(x,0)}$ とおくとき $1 \le s < \infty$ であり,

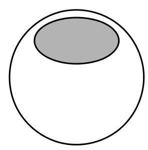
$$x \to 0 \;\Rightarrow\; s \to 1 \quad \text{また} \quad d(x,0) \to r \;\Rightarrow\; s \to \infty$$

である. 写像 $\varphi : B_r \to \mathbb{R}^2$ を $\varphi(x) = sx = \dfrac{rx}{r-d(x,0)}$ と定める.

逆に任意の $y \in \mathbb{R}^2$ に対して写像 $\psi : \mathbb{R}^2 \to B_r$ を $\psi(y) = \dfrac{ry}{r+d(y,0)}$ と定めると, $\psi(\varphi(x)) = x$ となり, φ は同相写像である. //

☞ この定理 2.4 の写像 φ または ψ はそのまま一般に n 次元で使うことができる.

問 2.17 上の証明をきちんと確かめよ.



問 2.18 球面の一部を右図のようにカットした曲面を M とすると, $M \approx D^2$ であることを説明せよ.

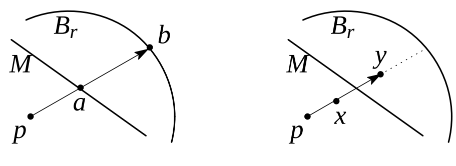
定理 2.4 の (1) の考え方を応用すると, 定理 2.3 の拡張が次のように得られる.

〖**定理 2.5**〗 $\mathbb{R}^2$ 上で, 有限個の辺から成る任意の多角形 M に対して, その内部も含めて $M \approx D^2$ である.

証明 M を内部に含む適当な大きさの円盤 B_r をとり, 下図のようなステレオ射影を考える. M の境界上の点 a が B_r の境界上の点 b に対応されるとき, M の内部にある点 x を, 線分の長さの比が

$$pa : px = pb : py$$

となるように, B_r の内部の点 y に対応される写像 $\varphi : M \to B_r$ を考え, $\varphi(x) = y$ と定める. すると φ は同相写像となり, $M \approx B_r \approx D^2$ である.



ただし, M が凸多角形でない場合は基点点 p を適当にとりながら, いくつかのステレオ射影を繰り返して考えればよい. //