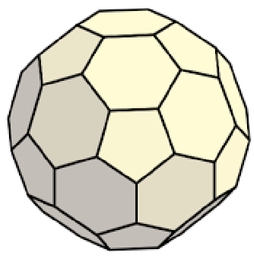
第3章　曲面と三角分割

この章から対象とする図形を曲面に絞り, より詳しく考察しよう. 曲面とは何か？その定義を明らかにしてみると, 3次元ユークリッド空間の中では全体像を見ることのできない曲面もあることがわかる, さまざまな曲面を統一的に扱う方法として, 曲面を平面モデル化するアイデアについて学ぼう.

§3.1　曲面

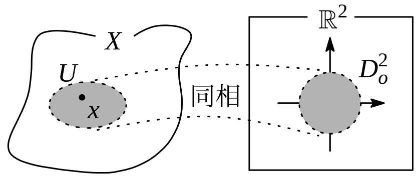
いろいろな図形を何かの基準に従って分類整理することは重要な問題である. そもそも我々は3次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の中で図形を見ているので図形 X とは $\mathbb{R}^3$ の部分集合のことである. これを一般化すると位相空間 $\mathbb{R}^n$ の中で図形 X と Y が同じ種類のものかどうかを考える問題になる. その基準を「同相かどうか？」として考えると, 定理 2.3 により「位相空間 $\mathbb{R}^2$ において円 X と三角形 Y は同じ種類の図形である」という結論が得られたのである. しかし同相関係を基準にあらゆる図形を分類することは難しい問題である. そこで対象を「曲面」という図形に絞って考えることにしよう. そのためにはまず曲面というものを正確に定義しなければならない.

代表的な曲面として思い浮かぶのは球面であろう. 我々は地球という球面の上で生活しているが, 身の回りの地面は平らである. 球面 S^2 において各点 x の適当な近傍 U を考えると, それは平面の一部分（すなわち $\mathbb{R}^2$ の部分空間）と見る（近似する）ことができる. すると右図のように, 球面は2次元の小さな平面で鱗（うろこ）のように覆われているとも考えるられる.



球面のイメージ図

このことを一般化して曲面というものを定義しよう. 位相空間 $X=(X,\mathscr{A})$ の各点 $x\in X$ に対して, その点を含む開集合 $U\in\mathscr{A}$ があり, U は単位開円盤 D_o^2 または単位半開円盤 $\left\{x\in D_o^2 \,\middle|\, x_2\geq 0\right\}$ と同相であること, また任意の異なる2点 x,y に対して $x\in U,\ y\in V,\ U\cap V=\emptyset$ となる開集合 U,V があること, その2つのことが満たされるとき X を**曲面** *surface* という.



☞ 別の言い方をすると, 曲面とは2次元の**多様体** *manifold* のことである. ただし多様体の詳しいことについては第6章以降で議論する.

開円盤 D_o^2 ではなく, 半開円盤と同相になる点のところは曲面の境界になる. それを次に定義しよう.

一般に曲面 X について, 各点 $x\in X$ に対して単位開円盤に同相な開集合を U_x とする. もしある点 x では単位開円盤に同相な開集合がない（単位半開円盤に同相なものはある）場合には $U_x=\emptyset$ とすると決めて, 和集合 $X_o=\bigcup_{x\in X} U_x$ と表すとする. $X\setminus X_o$ を**境界** *boundary* という. $X\setminus X_o=\emptyset$ のとき, X は境界をもたないという. さらに, 境界をもたない曲面でコンパクトなものを**閉曲面** *closed surface* という.

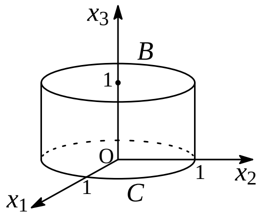
☞ この章から次の章にかけて, 最終の目標は「閉曲面の分類」である. 言い換えれば「境界をもたないコンパクトな2次元多様体の分類」である. 結論を言えば, 立体的な図形である閉曲面を「連続的な変形」と「同一視」という手法で平面的な図形に置き換え, さらにそれを文字列で表現して, 代数的に処理することで分類を完全に解決することである. その分類において, 第1章で見たオイラーの多面体公式に現れた「$v-e+f$」の値が重要な役割をはたすことがわかる. ただしそれだけでは完全な解決にならず, 「向き付け可能性」という曲面が持つもう一つの性質が重要であることもわかる.

いくつかの曲面の例について考えよう.

例 3.1 右図のような円柱面（天井と底の面を含まない側面だけ）

$$An = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (x_1)^2 + (x_2)^2 = 1,\ 0 \leq x_3 \leq 1 \right\}$$

は境界をもつコンパクトな曲面である.



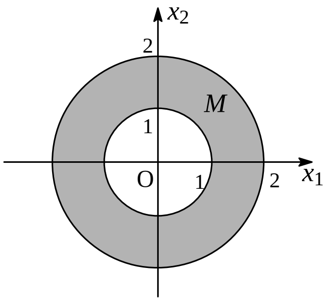
解 $An = S^1 \times [0,1]$ であり, 境界は

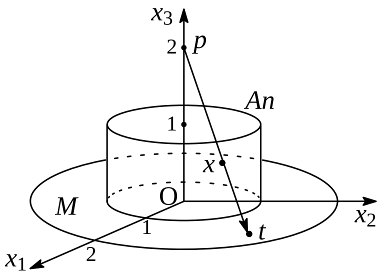
$$B = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in An \;\middle|\; x_3 = 1 \right\} \text{ と } C = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in An \;\middle|\; x_3 = 0 \right\}$$

である. また, An は $\mathbb{R}^3$ 内の有界な閉集合なのでコンパクトである. //

下図左のように $\mathbb{R}^2$ 内の同心円で囲まれた図形 $M = \left\{ (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1 \leq (t_1)^2 + (t_2)^2 \leq 2 \right\}$ を**アニュラス** *annulus* という. M は $\mathbb{R}^2$ 内の有界な閉集合なのでコンパクトである. また, 図を見ると各点 $x \in M$ に対して半径の小さい円盤 U を考えると, U は単位開円盤 D_o^2 または単位半開円盤と同相になることがわかる.

下図右のように, 定点 $p(0,0,2) \in \mathbb{R}^3$ からのステレオ射影 $\varphi : An \to M$ により $An \approx M$ である. これにより, 円柱面 An もアニュラスということにする.

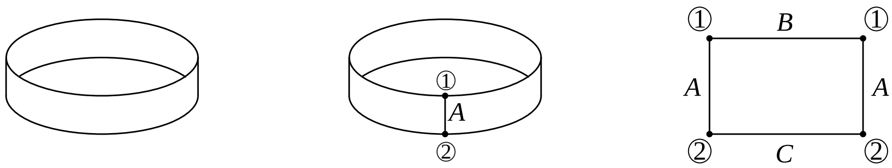




問 3.1 例 3.1 のステレオ射影 φ について, $t = \varphi(x)$ と $x = \varphi^{-1}(t)$ の式を求めよ.

☞ 下図 (1) の円柱面 An を (2) のように境界上に点①と②をとり, その 2 点を結ぶ辺 A で切り離すと, 帯状の図形 (3) になる. アニュラス An が曲面であることを図 (1) の立体で考えるよりも, それを平面的な図にした (3) で考える方が分かりやすいかもしれない.

(1) An (2) (3)



位相区間 $\mathbb{R}^2$ の部分空間アニュラスとは図 (3) であるとして, 点 $x \in An$ の位置を場合分けして考えると, 以下のことが容易に想像できるからである.

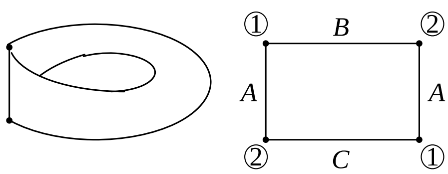
(i) $x \in B$ または $x \in C$ のとき単位半開円盤と同相な開集合がある.

(ii) $x \notin B$ かつ $x \notin C$ のとき単位開円盤と同相な開集合がある.

(iii) 任意の異なる 2 点 x, y に対して $x \in U,\ y \in V,\ U \cap V = \emptyset$ となる開集合 U, V がある,

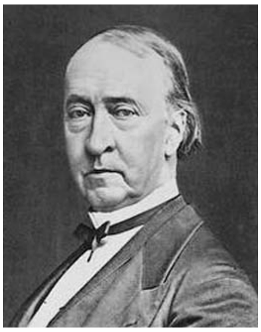
以下の曲面の例でも「曲面であること」の説明は同じ考え方なので, その説明を繰り返すことなく省略する.

例 3.2 上図 (2) のように辺 A で切り離したあと, 点①と②が合うように一度ひねって貼り合せると, 右図のような捩れた曲面ができる. これは**メビウスの帯** *Möbius loop* または *Möbius band* と呼ばれる有名な図形である. これを Mb と表すことにする. これもコンパクトな曲面であるが, 境界をもつので閉曲面ではない. また An と Mb は同相でない.



☞ メビウスの帯という名称はドイツの数学者メビウス（August Ferdinand Möbius, 1790-1868）にちなんで付けられたものである. ただしほとんど同じ時期にリスティング（Johann Benedict Listing, 1808-1882）も同じ図形を発見し, メビウスより早く論文で発表しているという. また, リスティングはトポロジー *Topology* という言葉の名付け親である. ただしトポロジーが数学の一つの分野として大きく発展するのはフランスの数学者ポアンカレ（Jules-Henri Poincaré, 1854-1912）の研究からである.


メビウス


リスティング


ポアンカレ

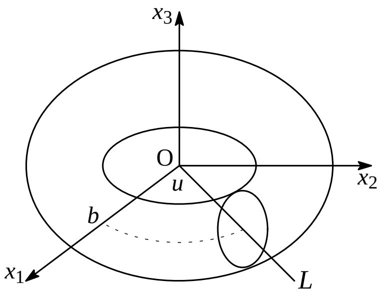
例 3.3 球面 S^2 は閉曲面である.

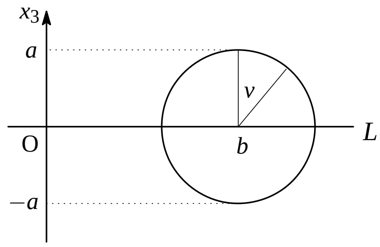
解 $U_1 = S^2 \setminus \{(0,0,1)\}, U_2 = S^2 \setminus \{(0,0,-1)\}$ とおく. 問 2.16 で考えたように, $U_1 \approx \mathbb{R}^2$ また $U_2 \approx \mathbb{R}^2$ である. すべての点 $x \in S^2$ は $x \in U_1$ または $x \in U_2$ であり, $S^2 = U_1 \cup U_2$ だから, S^2 は境界をもたない曲面である. さらに S^2 は $\mathbb{R}^3$ 内の有界な閉集合だからコンパクトである. //

例 3.4 a, b は定数で $0 < a < b$ とするとき, 下図のようなドーナツ形をした, $\mathbb{R}^3$ の部分集合

$$T^2 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \,\middle|\, x_1 = (b + a\sin v)\cos u,\ x_2 = (b + a\sin v)\sin u,\ x_3 = a\cos v \right\}$$

を**トーラス** *torus* という. ここで u, v は下図の角度である. トーラス T^2 は閉曲面である.



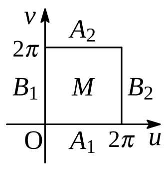


解 $\mathbb{R}^2$ 内の部分集合 $M = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] = \left\{ (u, v) \,\middle|\, 0 \leq u \leq 2\pi,\ 0 \leq v \leq 2\pi \right\}$ において

　辺 $A_1 = [0, 2\pi] \times \{0\}$ と $A_2 = [0, 2\pi] \times \{2\pi\}$ を同一視

　辺 $B_1 = \{0\} \times [0, 2\pi]$ と $B_2 = \{2\pi\} \times [0, 2\pi]$ を同一視

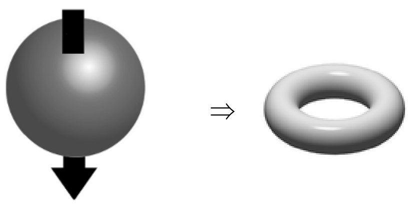
すると境界はなくなり, $T^2 \approx S^1 \times S^1$ である. また S^1 は $\mathbb{R}^2$ においてコンパクトなので $S^1 \times S^1$ はコンパクトであり, したがって T^2 は閉曲面である. //



☞ 上の説明のようにトーラス T^2 は半径 a の小さな円を x_3 軸のまわりに回転してできる図形であり, したがって**円環面**または**輪環面**とも言われるが, 別の考え方もあり, 右図のように球面 S^2 に貫通する孔を一つあけた図形と考えることもできる.

　なお, 球面に貫通する穴をあけるという発想は閉曲面の分類で重要な意味をもっていることがあとで分かる.

　また $S^1 \times S^1$ がコンパクトであることについては定理 5.5 でも考える.

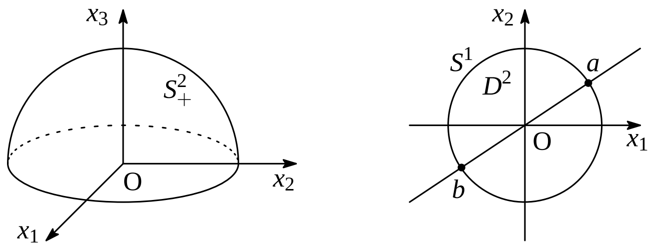


例 3.5 球面 S^2 から以下のように生成される曲面を**射影平面** *projective plane* といい, P^2 と表す. これは閉曲面である.

$\mathbb{R}^3$ 内の原点を通る直線と球面 S^2 との 2 つの交点を同一視した位相空間が射影平面 P^2 である. 詳しくは §5.3 と §6.3 で議論するが, 簡単に説明すると, まず半球

$$S^2_+ = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in S^2 \;\middle|\; x_3 \geq 0 \right\}$$

を考える. $S^2_+ \approx D^2$ である. この境界は円周 S^1 である. 下図右で, 原点に対称な点 $a \in S^1$ と $b \in S^1$ を同一視してできる曲面が P^2 であり, 境界のない曲面である. コンパクトであることは D^2 が有界な閉集合であることから導かれるが, 詳しいことは §5.3 で考える.

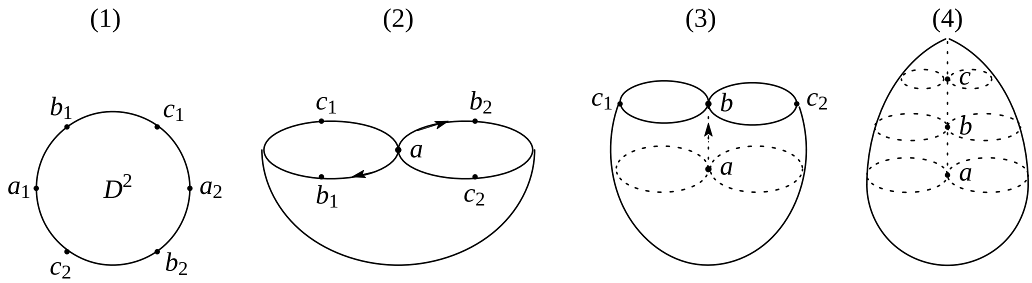


境界の同一視の仕方を考えると, 射影平面 P^2 を 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ 内の図形として実際に見ることはできない. P^2 は 4 次元空間 $\mathbb{R}^4$ 内の図形であることが知られている. 第 5 章以降で一般の n 次元の射影空間 P^n について議論するが, 特に $n = 2$ のとき P^2 を射影平面という.

射影平面 P^2 を 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ 内の図形として無理やり作って見ると, 以下のようになる.

(1) まず円盤 D^2 の境界 S^1 上にいくつかの点をとる.
(2) 点 a_1 と a_2 を同一視して 1 点 a にする.
(3) 次に矢印の方向に貼り合せながら点 b_1 と b_2 を同一視して 1 点 b にする.
(4) 同様に, 点 c_1 と c_2 を同一視して 1 点 c にする.

最終的に図 (4) の「とんがり帽子」のような図形が想像できる. その貼り合せ部分を**クロスキャップ** *crosscap* という.



$\mathbb{R}^4$ 内のクロスキャップと呼ばれる図形を三角帽子のように単純化して考えるならば, 射影平面 P^2 とは, 球面 S^2 に穴をあけて, その穴をクロスキャップという三角帽子で塞いだものとイメージしてよい.