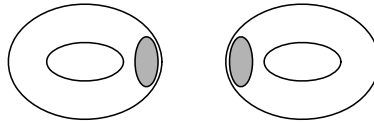


§3.3 連結和

複雑な形の曲面を単純な曲面に分解して考える手法について考えよう。たとえば右図のように2つの穴があるトーラスを考えると、そのオイラー標数を求めるにはどうしたらよいだろうか。

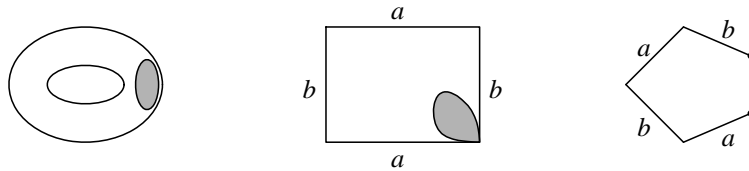


これは下図のように穴をあけた2つのトーラスを貼り合わせて穴をふさぎ、右図のような形を作ると考えるのである。このようにして作られたものを連結和 *connected sum* といい、 $T^2\#T^2$ と表す。

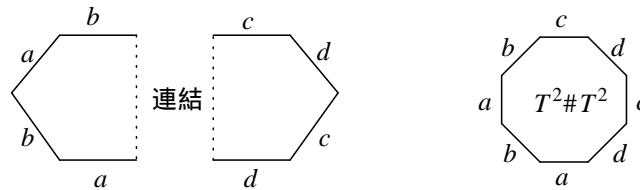


例 3.12 連結和の多辺形モデルの作り方について、 $T^2\#T^2$ を例に説明しよう。

トーラスに穴をあけ、その穴の境界上の点で例 3.10 で考えたように切り開き、4 辺形に広げる。穴の境界を仮の辺と見なした多辺形を考える。

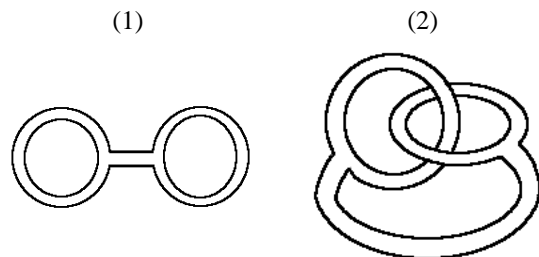


そのような多辺形を2つ用意して、穴の境界で貼り合わせる。連結和 $T^2\#T^2$ は辺の個数が倍に増えた8 辺形で表される。



☞ 連結和 $T^2\#T^2$ は右図 (1) のようにメガネの形の立体に連続的に (粘土のように柔らかい物体を切り離すことなく曲げたり伸ばしたりして) 変形できる。

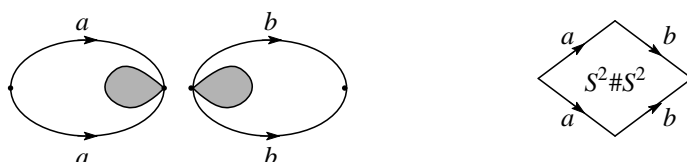
では右図 (2) のように2つの輪が絡んだ立体があるとき、連続的に変形して (1) の形にすることができるだろうか? 逆に (1) から (2) へ連続的に変形できるか? この問に対する答えは「できる」であり、右図はどちらも連結和 $T^2\#T^2$ と同相な図形である。



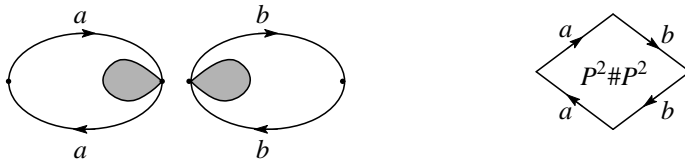
一般に、2つの曲面 M_1 と M_2 があるとき、それぞれに穴をあけ貼り合わせてできる連結和を $M_1\#M_2$ と表す。一般に、 M_1 が m_1 辺形モデルで M_2 が m_2 辺形モデルでそれぞれ表されているならば $M_1\#M_2$ の多辺形モデルは $m_1 + m_2$ 辺形となる。さらに連結和 $M_1\#M_2$ と M_3 の連結和 $(M_1\#M_2)\#M_3$ も考えられる。こうして次々に複雑な曲面が考えられるが、逆に複雑な曲面を連結和という考え方でどんどん分解していくと、よく知られた曲面をピースとして成り立っていることが分かる。それは次章で議論しよう。

例 3.13 連結和の多辺形モデルを具体的な例で確かめてみよう。

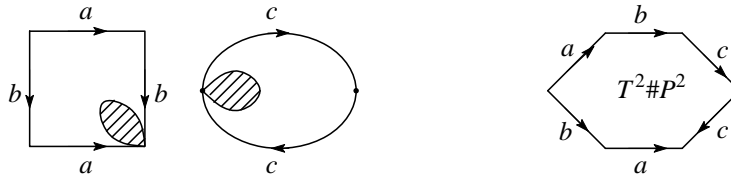
(1) $S^2\#S^2$ 例 3.9 の2 辺形を用いて



(2) $P^2 \# P^2$ 例 3.11 の 2 辺形を用いて

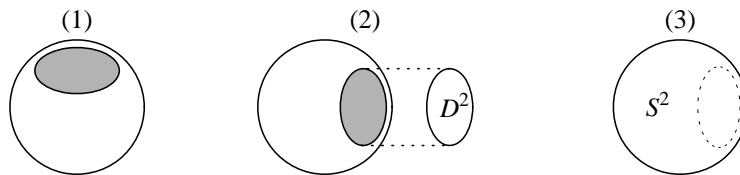


(3) $T^2 \# P^2$



例 3.14 $S^2 \# S^2 \approx S^2$

解 球面 S^2 に穴をあけたものは下図 (1) であるが、これは問 2.18 により、円盤 D^2 と同相である。すると、もう一つの球面に穴をあけて連結するとき、下図 (2) のように D^2 で穴をふさぐことになり、一つの球面 (3) に戻る。 //



この例から、任意の曲面 M と球面 S^2 との連結和を作るとき、曲面 M にあいた穴が球面によってふさがれ、曲面 M が復元されることがわかる。したがって、次の結果が得られる。

【定理 3.4】任意の閉曲面 M に対して $M \# S^2 \approx M$

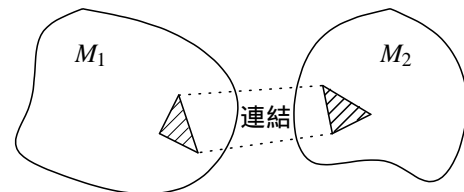
例 3.15 $T^2 \# S^2 \approx T^2$, $P^2 \# S^2 \approx P^2$

【定理 3.5】(連結和のオイラー標数) 閉曲面 M_1, M_2 について次の等式が成り立つ。

$$\chi(M_1 \# M_2) = \chi(M_1) + \chi(M_2) - 2$$

証明 2 つの閉曲面 M_i ($i = 1, 2$) をそれぞれ三角分割し、頂点、辺、面の数を $v(M_i), e(M_i), f(M_i)$ と表す。 M_i から面を一つずつとって連結すると

$$\begin{aligned} v(M_1 \# M_2) &= v(M_1) + v(M_2) - 3 \\ e(M_1 \# M_2) &= e(M_1) + e(M_2) - 3 \\ f(M_1 \# M_2) &= f(M_1) + f(M_2) - 2 \end{aligned}$$



となるからである。 //

例 3.16 次の結果が得られる。

- (1) $\chi(S^2 \# S^2) = \chi(S^2) + \chi(S^2) - 2 = 2 + 2 - 2 = 2$
- (2) $\chi(T^2 \# T^2) = \chi(T^2) + \chi(T^2) - 2 = 0 + 0 - 2 = -2$
- (3) $\chi(P^2 \# P^2) = \chi(P^2) + \chi(P^2) - 2 = 1 + 1 - 2 = 0$

例 3.17 $\chi(S^2 \# T^2 \# P^2) = -1$

解 定理 3.4 より $S^2 \# T^2 \# P^2 \approx T^2 \# P^2$ だから

$$\begin{aligned}\chi(S^2 \# T^2 \# P^2) &= \chi(T^2 \# P^2) && \text{定理 3.1 より} \\ &= \chi(T^2) + \chi(P^2) - 2 && \text{定理 3.5 より} \\ &= 0 + 1 - 2 = -1 && //\end{aligned}$$

【定理 3.6】 n 個の閉曲面 M の連結和 $M \# \dots \# M$ を nM と表す. 閉曲面 M のオイラー標数を $\chi(M) = m$ とするとき, 次の等式が成り立つ.

$$\chi(nM) = (m-2)n + 2$$

証明 数学的帰納法で示す. $n=1$ のとき, $\chi(M) = m-2+2 = m$ であり, 等式は成り立っている. $n=k$ のとき成り立つとする. すなわち

$$\chi(kM) = (m-2)k + 2$$

と仮定する. $n=k+1$ のとき

$$\begin{aligned}\chi((k+1)M) &= \chi(kM \# M) = \chi(kM) + \chi(M) - 2 && \text{定理 3.5 より} \\ &= (m-2)k + 2 + m - 2 && \text{仮定より} \\ &= (m-2)(k+1) + 2\end{aligned}$$

となり, 成り立つことがわかる. したがって等式はすべての自然数 n について成り立つ. //

この定理から次の結果が得られる.

【定理 3.7】自然数 n に対して, 次の関係式が成り立つ.

$$(1) \chi(nS^2) = 2 \quad (2) \chi(nT^2) = 2 - 2n \quad (3) \chi(nP^2) = 2 - n$$

問 3.7 次のオイラー標数を求めよ.

$$(1) \chi(4T^2) \quad (2) \chi(5P^2) \quad (3) \chi(3T^2 \# 2S^2) \quad (4) \chi(2T^2 \# 6P^2)$$