第4章　閉曲面の分類

曲面を平面上の**多辺形モデル**に置き換えるアイデアをさらにもう一歩進めて, 周辺のラベルの文字列（**語**または**単語**という）によってその曲面を表現するものとする. それぞれの曲面に対してその語の標準形を定め, また同一視する辺の変更（それを**語の演算**という）の規則を決めて, 閉曲面の分類という問題を考えよう. さらに, 曲面の**向きづけ可能性**という新たな性質を導入する.

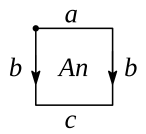
§4.1　多辺形モデルの語

いろいろな曲面について多辺形モデルを考えるとき, ある頂点を起点として時計回りに辺をたどり, 辺のラベルを順に並べたものを考え, それを多辺形モデルの**語**という. このとき同一視される辺には矢印が付いていて, その向きを合わせて貼り合さなければならない. 矢印が時計回りとは逆の向きのときはラベルに -1 乗をつけて表すものとする.

同じラベルは同一視する（貼り合せる）ことで境界ではなくなるが, そうでないものは境界である. 具体的な例で多辺形モデルの語を説明しよう.

例 4.1　アニュラス　$An = abcb^{-1}$（標準形）

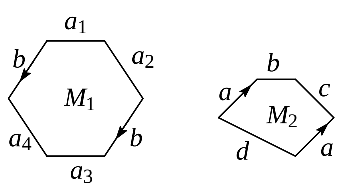
例 3.1 や例 3.7 をもとに, 右図 (1) のように 4 辺形にラベルを付け, 左上の頂点を基点として時計回りに辺をたどる. 起点をどこにとるかでラベルの列すなわち語は何通りかで表されるが, どれも同じ曲面であるので等号で示す.



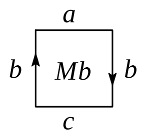
$$abcb^{-1} = bcb^{-1}a = cb^{-1}ab = b^{-1}abc$$

辺 a, c は同一視しない（貼り合せない）ので境界となる.

例 4.2　右図の 6 辺形モデルで表される曲面 $M_1 = a_1a_2ba_3a_4b^{-1}$ について $M_1 \approx An$ である. また 5 辺形モデルで表される曲面 $M_2 = abca^{-1}d$ についても $M_2 \approx An$ である. どちらも同一視する辺を貼り合せると境界をもつ円筒形の曲面になり, 辺のラベルを付け替えると例 4.1 の標準形になるからである.



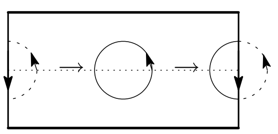
例 4.3　メビウスの帯　$Mb = abcb$（標準形）

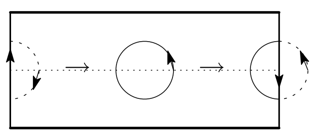


例 3.2 で考えたように, 同一視する辺 b の向きを右図のようにしたものである. 辺 a, c は同一視しない（貼り合せない）ので境界となる.

アニュラス An とメビウスの帯 Mb についてオイラー標数を求めると, どちらも 0 であるが, 曲面の形はまったく違うので, オイラー標数とは別の指標が必要であることがわかる. この 2 つの曲面の違いは辺 b の向きにあり, それを特徴づけるものは何か考えてみよう.

下図のように曲面上で小さい円を回転させながら移動させたとする, アニュラス An の場合, 下図左のように, 回転する小円が元の位置に戻ってきたとき, 回転の向きは変わらない. それに対して, メビウスの帯 Mb の場合, 下図右のように, 回転する小円が元の位置に戻ってきたとき, 回転の向きは反対になる.





【定義 4.1】 曲面上の道に沿って回転する小円が移動し, 元の位置に戻るとする. どのような道をたどっても回転の向きが元と同じであるとき, その曲面は**向きづけ可能** *orientable* であるという. それに反して, もし一つの道でもそれをたどって戻ると逆回転になるようなものがあるとき, その曲面は**向きづけ不可能** *non-orientable* であるという.

☞ 曲面の**向きづけ可能性** *orientability* はオイラー標数とともに重要な役割をはたすものである. 上の２つの例を参考にすると, 次のように簡単に見分けられることがわかる. すなわち, 多辺形モデルの語において, 周辺のラベルが「すべて x と x^{-1} の対で構成されているならば, 向きづけ可能」であり, 「x と x の対が少なくとも１組あるならば, 向きづけ不可能」である.

問 4.1　多辺形モデルが次の語で表される曲面について, 閉曲面かどうか, 向き付け可能かどうかを答えよ.

(1) $abc^{-1}b^{-1}c$　(2) $acb^{-1}ca^{-1}b$　(3) $a^{-1}bca^{-1}c^{-1}d$　(4) $ab^{-1}ac^{-1}b^{-1}c$　(5) $aca^{-1}bdc^{-1}b^{-1}d^{-1}$

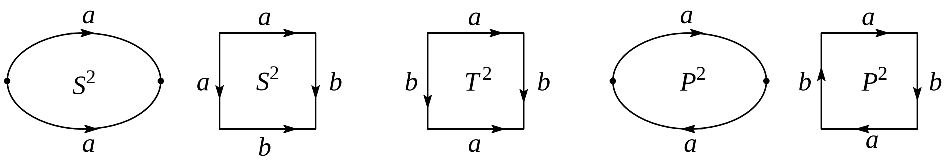
例 4.4　以下の曲面では, すべての辺が対になっていて, 単独のラベルをもつ辺がないので, 境界をもたないことが確認できる.

(1) 球面　$S^2 = \underline{aa^{-1}}$（２辺形）　または　$S^2 \approx abb^{-1}a^{-1}$（４辺形）　$\cdots$ 向き付け可能

(2) トーラス　$T^2 = \underline{aba^{-1}b^{-1}}$　$\cdots$ 向き付け可能

(3) 射影平面　$P^2 = \underline{aa}$（２辺形）　または　$P^2 \approx abab$（４辺形）　$\cdots$ 向き付け不可能

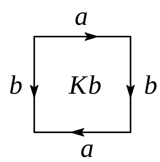
特に下線の語をそれぞれの曲面の**標準形**とする.



例 4.5　右図のような４辺形モデルを**クラインの壺** *Klein bottle* という. これを Kb と表すことにする. その語は

$$Kb = abab^{-1} \quad（標準形）$$

である. Kb は３次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ 内で全体像を見ることはできない向きづけ不可能な閉曲面である. この図形の名称はドイツの数学者クライン（Felix Christian Klein, 1849〜1925）にちなんで付けられた.



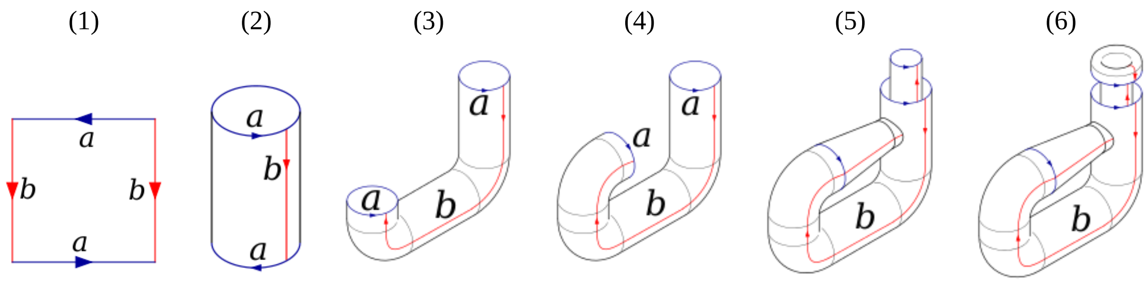
☞ 上の図で Kb のオイラー標数を求めると, $v - e + f = 1 - 2 + 1 = 0$ である. 同じオイラー標数を持ち, 標準形が似ている曲面にトーラス T^2 があるが, 両者は向き付け可能かどうかで区別される. 多辺形モデルの図で, 対になっている２組の辺が下図のように同じ向きか, それともどちらか一方の対が逆向きかということで見分けることもできる.

	T^2	Kb
オイラー標数	0	0
向き付け	可	不可

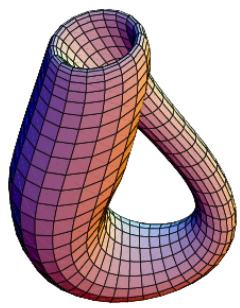
トーラス T^2　　　　クラインの壺 Kb

$\mathbb{R}^3$ 内で Kb の全体像を想像すると以下のように考えられている. ウィキペディアからその図を借りて説明しよう. (1) で上辺と下辺のラベル a の向きが上記の多辺形モデルの図と比べて逆になっているが, なんら問

題ではない. 辺 b を貼り合わせて円筒状の形 (2) にして, (3)〜(4) のように伸ばしながら曲げていく. (4) でラベル a の辺の向きが合わないのでこのまま貼り合せることはできない.

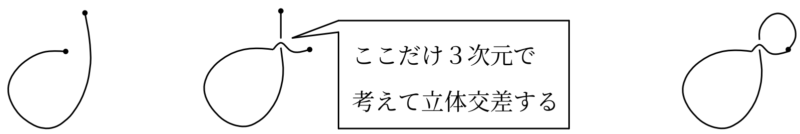


そこで次元を上げて, 円筒の曲げた部分を４次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^4$ 内で操作し, 自分自身の円筒の内部へ伸ばし, それを (5) とする. その図 (5) を見ると曲面が自己交差しているが, ４次元空間 $\mathbb{R}^4$ 内で考えると自己交差していない.

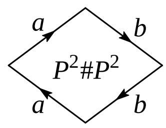


自分自身の内部でさらに伸ばした円筒の先端を見ると図 (6) のように辺 a の向きが一致するので, そこで貼り合せて境界のない曲面げできる. 右はこうしてできあがった曲面の想像図である. ３次元空間 $\mathbb{R}^3$ 内で作図すると, 内部に入り込む部分が自分自身と交差するようになるが, ４次元空間 $\mathbb{R}^4$ 内で考えると交差していないのである.

分かりにくいので次元を下げた状態で考えてみよう. 下図右のように２次元平面 $\mathbb{R}^2$ 上に曲線があり, 両端を貼り合せるために一方の先端を伸ばしていくとき, どうしても自分自身を横切っていかなければならないとする. このとき自己交差しないようにするために次元を一つあげて３次元空間 $\mathbb{R}^3$ で考え, 自分自身をまたいで反対側へ伸ばせばよいというアイデアである.

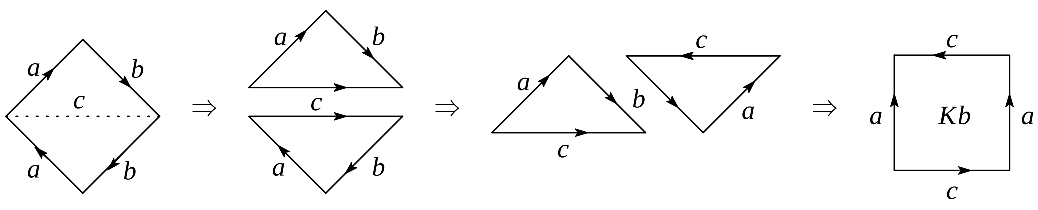


〘**定理 4.1**〙　$P^2 \# P^2 \approx Kb$



証明 まず２つの射影平面を連結させると例 3.13 で見たように右図のような多辺形モデルになる.

次に, これを下図のように点線 c で切って２つに分け, 辺 b を貼り合せるとよい.

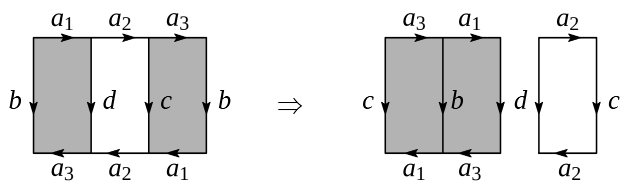


☞ 上の図で変形の流れを強調する意味で $\Rightarrow$ で示しているが, この流れは可逆的であるので $\Leftrightarrow$ または $\approx$ と解釈せよ. これ以降も図を使う変形の過程で同様とする.

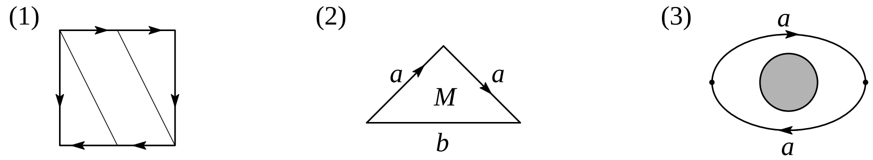
問 4.2 定理 4.1 を用いてクラインの壺のオイラー標数 $\chi(Kb)$ を求めよ.

例 4.6 クラインの壺を切り離して２つのメビウスの帯に分けることができる.

解 クラインの壺の４辺形モデル（例 4.5）を下図の左のように３分割し, 塗りつぶした部分の辺 b を貼り合せると２つのメビウスの帯になる. //



問 4.3 次の図を使って問に答えよ.



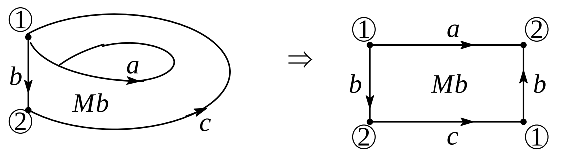
(1) クラインの壷を図のように切り離すことで, 2 つのメビウスの帯に分けることができることを確かめよ.

(2) 図の 3 辺形で表される曲面 M について, $M \approx Mb$ であることを示せ.

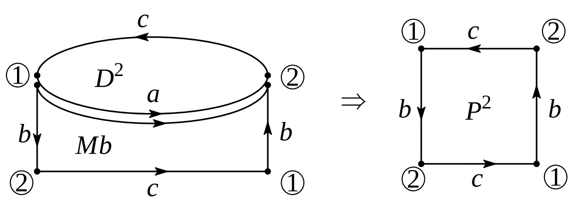
(3) 射影平面 P^2 に穴をあけたものはメビウスの帯 Mb と同相であることを示せ.

例 4.7 メビウスの帯 Mb の境界に円盤 D^2 の境界を貼り合せると射影平面 P^2 が得られる.

$\boxed{\text{解}}$ メビウスの帯（例 4.3）を図のように切り開くとき, その境界は辺 a と c である.



円盤 D^2 を 2 辺形で表し, その辺を a, c とする. メビウスの帯 Mb と閉円盤 D^2 の境界を向きを考えて貼り合せると, 下図のように射影平面 P^2 ができる. //



問 4.4 多辺形モデルの図を使って, 次の問に答えよ.

(1) 2 つの円盤 D^2 をもってきて, その境界を貼り合せると球面 S^2 が得られる.

(2) 問 4.3 (2) の閉曲面 M の境界と円盤 D^2 の境界を貼り合せると P^2 が得られる.