略解とヒント

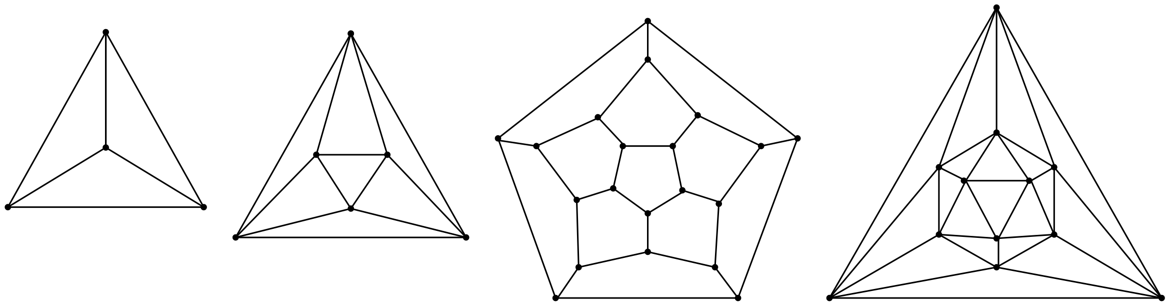
解答の仕方は考え方によっていろいろある場合があるので, 以下に示すものにこだわらず, 自分で考えたり, 友人と議論したり, 文献を調べたりするのが良い.

第　1　章

問 1.1　略　　**問 1.2**　略

問 1.3　平面的な図 M_1 は以下のようになる.

正 4 面体　　正 8 面体　　正 12 面体　　正 20 面体

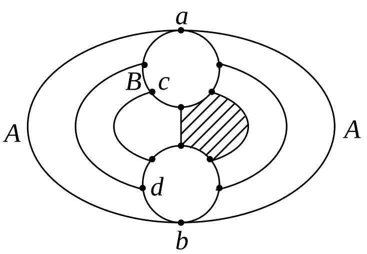


問 1.4　どれも 2 になる.

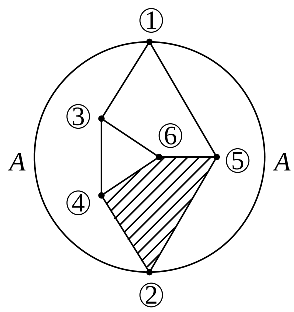
問 1.5　略　　**問 1.6**　略

問 1.7〜**問 1.8**　下の図, またはそれを左右対称にした図

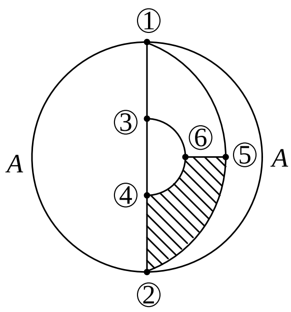
問 1.7



問 1.8



他にも



問 1.9

図 (2)

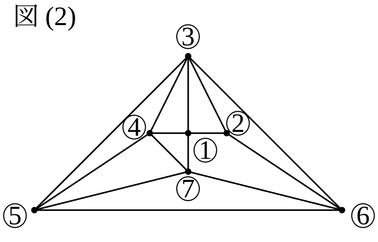
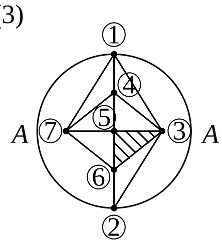


図 (3)

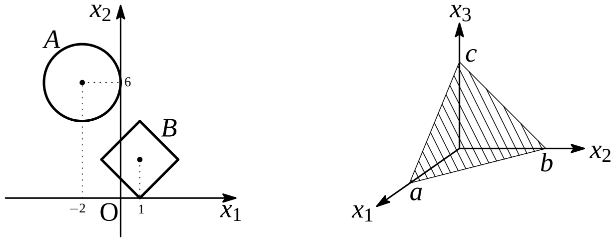


第　2　章

問 2.1　略　　**問 2.2**　略

問 2.3〜問 2.4

問 2.3　　　　　　問 2.4



問 2.4　$\mathbb{R}^3$ におけるマンハッタン距離 $d_M(a,b) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + |a_3 - b_3|$

　原点から一定の距離（それを t とする）にある点の集合を $x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0$ の範囲で考えると, 上図のように, 座標軸上の 3 点 $a(t,0,0), b(0,t,0), c(0,0,t)$ を頂点とする三角形（斜線部分）である. したがって原点から等距離にある点の集合は上図の三角形を一つの面としてもつ正 8 面体である.

問 2.5　任意の $U_\varepsilon(a)$ に対して, $\delta = \varepsilon$ とすれば $V_\delta(a) \subset U_\varepsilon(a)$ となる. 逆に, 任意の $V_\delta(a)$ に対して, $\varepsilon = \dfrac{\delta}{2}$ とすれば $U_\varepsilon(a) \subset V_\delta(a)$ となる.

問 2.6　(1) 任意の $x \in (a,b)$ に対して $\varepsilon = \min\{\ |a-x|, |b-x|\ \}$ とすると, $x \in U_\varepsilon(x) \subset (a,b)$ となるから (a,b) は $\mathbb{R}^1$ の開集合である.

(2) 補集合 $B = \mathbb{R}^2 \setminus A$ を考える. 任意の $x \in B$ に対して $0 < \varepsilon < d(a,x)$ となる ε をとれば, $x \in U_\varepsilon(x) \subset B$ だから B は $\mathbb{R}^2$ の開集合である. したがって, A は閉集合である. また, a は A の内点でも外点でもないから境界点である.

(3) 任意の点 $a \in B$ に対して, $0 < \varepsilon < (a_1)^2 + (a_2)^2 - 1$ なる ε をとれば, 近傍

$$U_\varepsilon(a) = \left\{\ x \in \mathbb{R}^2 \ \middle|\ d(a,x) < \varepsilon\ \right\}$$

は B に含まれるから, B は開集合である. 次に, $D = \left\{\ x(x_1,x_2) \ \middle|\ (x_1)^2 + (x_2)^2 < 1\ \right\}$ とおくとき, D に属する点はすべて B の外点であることがわかる. 任意の点 $a \in C$ に対して, どのように ε 近傍 $U_\varepsilon(a)$ をとっても

$$U_\varepsilon(a) \cap B \neq \emptyset, \qquad U_\varepsilon(a) \cap D \neq \emptyset$$

であり, したがって C は B の（同時に D の）境界点から成る集合である.

問 2.7　(1) 任意の $x \in A \cup B$ に対して $x \in A$ または $x \in B$ であり

$$\exists \varepsilon_1 > 0 \left\{\ x \in U_{\varepsilon_1}(x) \subset A\ \right\} \quad \text{または} \quad \exists \varepsilon_2 > 0 \left\{\ x \in U_{\varepsilon_2}(x) \subset B\ \right\}$$

だから $U_\varepsilon(x) = U_{\varepsilon_1}(x)$ とおけば $x \in U_\varepsilon(x) \subset A \cup B$ となるので, $A \cup B$ は開集合である. 次に, 任意の $x \in A \cap B$ に対して $x \in A$ かつ $x \in B$ であり

$$\exists \varepsilon_1 > 0 \left\{\ x \in U_{\varepsilon_1}(x) \subset A\ \right\} \quad \text{かつ} \quad \exists \varepsilon_2 > 0 \left\{\ x \in U_{\varepsilon_2}(x) \subset B\ \right\}$$

である. そこで $0 < \varepsilon < \min\{\ \varepsilon_1, \varepsilon_2\ \}$ となる ε をとれば

$$x \in U_\varepsilon(x) \subset U_{\varepsilon_1} \subset A \quad \text{かつ} \quad x \in U_\varepsilon(x) \subset U_{\varepsilon_2} \subset B$$

だから $x \in U_\varepsilon(x) \subset A \cap B$ となり, $A \cap B$ は開集合である.

(2) $A, B \in \mathscr{C}$ ならば $A^c = X \setminus A, B^c = X \setminus B \in \mathscr{O}$ であり

- $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c \in \mathscr{O}$ より $A \cup B \in \mathscr{C}$
- $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c \in \mathscr{O}$ より $A \cap B \in \mathscr{C}$

問 2.8 いろいろな位相が考えられる. 一例として, $A_2 = \{\ c\ \}, A_3 = \{\ a,b,c\ \}, A_4 = \{\ a,b,d\ \}$ とした場合, 連結な位相空間である.

問 2.9 $\emptyset = W \cap \emptyset$, $W = W \cap X$ と表せるから公理 (1) を満たす. (2) が満たされるのは明らかであろう. 任意の $A \cap W, B \cap W$（$A, B \in \mathscr{A}$）に対して

$$(A \cap W) \cap (B \cap W) = (A \cap B) \cap W, \quad (A \cap W) \cup (B \cap W) = (A \cup B) \cap W$$

だから公理 (3)(4) も満たされる.

問 2.10 単純な問であるが, 位相空間では点の近さが開集合によって**ゆる〜く**定められているので, その近さを保存するかしないかを考えて写像を作ればよい. たとえば X において点 2 と 3 は近いので,

$$\varphi(1) = c, \quad \varphi(2) = b, \quad \varphi(3) = b, \quad \varphi(4) = c$$

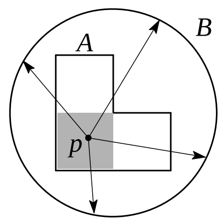
とすれば, φ は連続であり,

$$\psi(1) = c, \quad \psi(2) = b, \quad \psi(3) = c, \quad \psi(4) = c$$

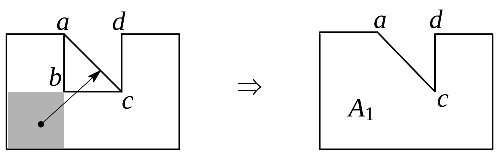
とすれば, ψ は連続でない,

問 2.11 $X = (X, \mathscr{A}_X), Y = (Y, \mathscr{A}_Y), Z = (Z, \mathscr{A}_Z)$ とする. 任意の $C \in \mathscr{A}_Z$ に対して $\psi^{-1}(C) \in \mathscr{A}_Y$ であり, $\varphi^{-1}(\psi^{-1}(C)) \in \mathscr{A}_X$ である. したがって $\Phi^{-1}(C) = \varphi^{-1}(\psi^{-1}(C))$ となるので Φ は連続である.

問 2.12 (1) 右図のように、A の内部の影をつけた部分に点 p をとり, ステレオ射影を考えると, A から円周 B への連続な全単射が得られる.
(2) まず A から凸多角形 A_2 への連続な全単射を順次構成し, そのあと A_2 から円周 B へのステレオ射影を考える.

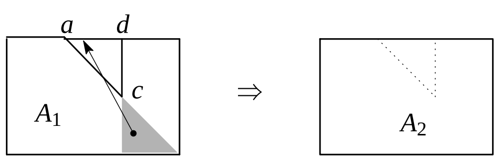


具体的には以下のように A のへこんでいる部分（頂点 a, b, c, d を結ぶ辺）を埋めてゆく. その第 1 段階は, 下図左のように影をつけた内部に基点をとり, ステレオ射影を考える.



上の図で A から A_1 への写像 φ_1 は「辺 ab と bc から辺 ac への部分はステレオ射影とし, それ以外の辺に対しては恒等写像」と定める.

第 2 段階は, 下図左のように影をつけた内部に基点をとり, ステレオ射影を考える. A_1 から A_2 への写像 φ_2 は「辺 ac と cd から辺 ad への部分はステレオ射影とし, それ以外の辺に対しては恒等写像」と定める.



最後に, A_2 の内部に基点をとり, A_2 から円周 B へのステレオ射影 φ_3 を考え, $\varphi = \varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1$ と定めれば, A から B への連続な全単射 φ が得られる.

問 2.13 $x \in I_1 \Rightarrow \varphi(x) = x$ また $x \in I_2 \Rightarrow t_1 = \dfrac{2}{2 - x_2}$

問 2.14 略 **問 2.15** 略 **問 2.16** 略

問 2.17 次の 2 つを示す. (1) $\psi(y) \in B_r^i$ (2) $\psi(\varphi(x)) = x$

(1) $d(\psi(y),0)=d\left(\dfrac{ry}{r+d(y,0)},0\right)=\dfrac{r\,d(y,0)}{r+d(y,0)}<\dfrac{r^2+r\,d(y,0)}{r+d(y,0)}=r$

(2) $\psi(\varphi(x))=\psi\left(\dfrac{rx}{r-d(x,0)}\right)=\dfrac{r\,\psi(x)}{r-d(\psi(x),0)}=\left\{r\cdot\dfrac{rx}{r+d(x,0)}\right\}\div\left\{r-\dfrac{r\,d(x,0)}{r+d(x,0)}\right\}=x$

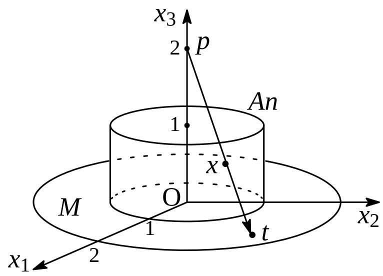
問 2.18 問 2.16 のステレオ射影を使えばよい.

第 3 章

問 3.1 アニュラスを

$M=\left\{\ (t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2\ \middle|\ 1\leq(t_1)^2+(t_2)^2\leq 2\ \right\}$

とおく. 定点 $p(0,0,2)\in\mathbb{R}^3$ からのステレオ射影 $\varphi:An\to M$ を考える. 相似な三角形の辺の比 $pt:px=2:(2-x_3)$ より

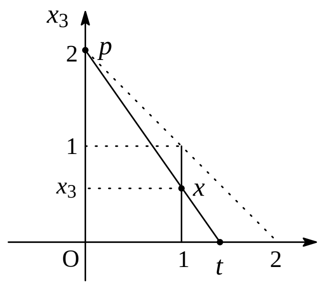


$$\frac{pt}{px}=\frac{2}{2-x_3}\qquad(0\leq x_3\leq 1)$$

となり, これをベクトルの関係式 $\overrightarrow{pt}=\dfrac{pt}{px}\overrightarrow{px}$ にあてはめると

$$\begin{pmatrix}t_1\\t_2\\-2\end{pmatrix}=\frac{2}{2-x_3}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3-2\end{pmatrix}\text{ だから}\quad t_1=\frac{2x_1}{2-x_3},\quad t_2=\frac{2x_2}{2-x_3}$$

別の辺の比 $pt:px=\mathrm{O}t:1$ より $\dfrac{px}{pt}=\dfrac{1}{\mathrm{O}t}=\dfrac{1}{\sqrt{{t_1}^2+{t_2}^2}}$ となる. ここで簡単のために $r=\sqrt{{t_1}^2+{t_2}^2}$ とおき, ベクトルの関係式 $\overrightarrow{px}=\dfrac{px}{pt}\overrightarrow{pt}$ にあてはめると



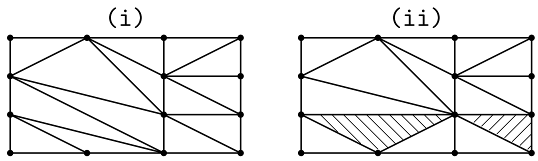
$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3-2\end{pmatrix}=\frac{1}{r}\begin{pmatrix}t_1\\t_2\\-2\end{pmatrix}\text{ より}\quad x_1=\frac{t_1}{r},\quad x_2=\frac{t_2}{r}$$

また $x_3-2=\dfrac{-2}{r}$ より $\quad x_3=\dfrac{2(r-1)}{r}$ となる.

問 3.2 略　　**問 3.3** 略

問 3.4 三角分割した状態から内部の辺を一つずつ取り去って考えよ.

問 3.5 一例を示す. 右図 (i) は正しく三角分割されているもの. (ii) は正しくない. たとえば斜線の 2 つの面の共通部分を見るとわかる.



問 3.6 略

問 3.7 (1) $\chi(4T^2)=2-2\times4=2-8=-6$ (2) $\chi(5P^2)=2-5=-3$

(3) $\chi(3T^2\#2S^2)=\chi(3T^2)=2-2\times3=2-6=-4$

(4) $\chi(2T^2\#6P^2)=\chi(2T^2)+\chi(6P^2)-2=2-2\times2+2-6-2=-8$

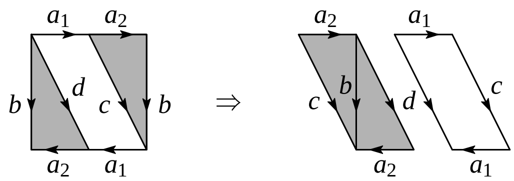
第 4 章

問 4.1

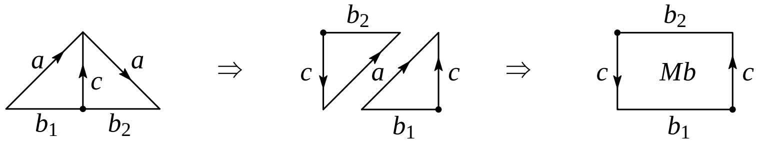
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
閉曲面	×	○	×	○	○
向き付け可能	○	×	×	×	○

問 4.2 $\chi(Kb)=\chi(P^2\#P^2)=\chi(P^2)+\chi(P^2)-2=0$

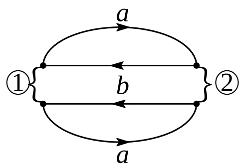
問 4.3 (1) 塗りつぶした三角形の部分の辺 b を貼り合せると 2 つのメビウスの帯になる.



(2) 下図のように, 辺 c で切り離し, 辺 a を貼り合せる.



問 4.4 (1) 閉円盤 D^2 を 2 辺形で表し, その辺を a,b とする. 右図のように, 辺 b を貼り合せると, 例 4.4 の球面 S^2 の 2 辺形モデルとなる.



(2) M の辺 b を 2 つに分けて $b = b_1 b_2$ とする. 図 1 または図 2
また D^2 を辺 c により 2 分割する. 図 3
図 2 と図 3 の辺 $b_1 b_2$ を貼り合せると図 4 になる.
図 4 の辺 c を貼り合せると, 例 4.4 の射影平面 P^2 の 2 辺形モデルとなる.

図 1

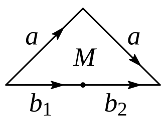


図 2

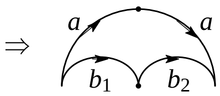


図 3

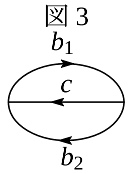
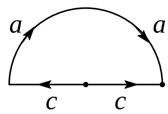


図 4



問 4.5 略

問 4.6 問題の曲面をどれも M とする.
(1) $M \approx abbacc \approx (abba)(cc) \approx (aabb)cc \approx 3P^2$
(2) $M \approx aba^{-1}cb^{-1}c^{-1} \approx (c^{-1}a)b(c^{-1}a)^{-1}b^{-1} \approx T^2$
(3) $M = a(bc)a^{-1}(bc)^{-1} \approx T^2$
(4) $M \approx abbc^{-1}a^{-1}c \approx (bb)(c^{-1}a^{-1}ca) \approx P^2\#T^2 \approx 3P^2$
(5) $M \approx abbc^{-1}ac^{-1} \approx (c^{-1}a)(c^{-1}a)bb \approx 2P^2$

問 4.7 問題の曲面をどれも M とする.
(1) $M \approx abcca^{-1}b^{-1} \approx (cc)(a^{-1}b^{-1}ab) \approx P^2\#T^2 \approx 3P^2$
(2) $M \approx abbca^{-1}c \approx (bb)(ca^{-1}ca) \approx P^2\#Kb \approx 3P^2$
(3) $M \approx abbdx^{-1}a^{-1}dyxy \approx (bb)(dx^{-1}a^{-1}dyxya) \approx (bb)(dd)(axyxya)$ $xy = c$ とおく
$\approx (bb)(dd)(acca) \approx (bb)(dd)(cc)(aa) \approx 4P^2$
(4) $M \approx bcb^{-1}dc^{-1}d^{-1} = cb^{-1}dc^{-1}d^{-1}b \approx cb^{-1}d^{-1}dc^{-1}b \approx cb^{-1}c^{-1}b \approx T^2$
(5) $M \approx aba^{-1}cb^{-1}dc^{-1}d^{-1} = d^{-1}aba^{-1}cb^{-1}dc^{-1} \approx d^{-1}b^{-1}aba^{-1}cdc^{-1} \approx (b^{-1}aba^{-1})(cdc^{-1}d^{-1}) \approx 2T^2$

問 4.8 まず $m \neq 0, n \neq 0$ として考える. いろいろな導き方がある. 次に $m = 0$ のとき $mT^2 = S^2$, また $n = 0$ のとき $nP^2 = S^2$ とすると, 関係式は $m \geq 0, n \geq 0$ で成立する.

問 4.9 問 4.8 の関係式から得られる.

問 4.10 (1) 4 (2) 10 (3) 14