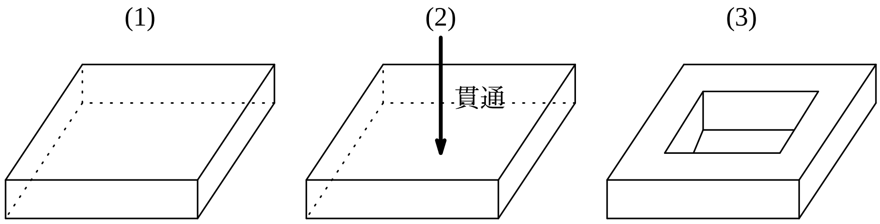
§1.2　オイラーの多面体定理

空間 $\mathbb{R}^3$ 内の図形で４つ以上の面（平面の一部）をもち, 各頂点を結ぶ辺（直線の一部）があり, どの面もそれらの辺に囲まれているような立体を**多面体**という. 頂点・辺・面の数は有限個とする.

下図 (1) は多面体の例である. 多面体の外部から図 (2) のように立体を貫通するように穴をあけ, その穴の境界を新たな頂点・辺・面によって塞いだものを**穿孔多面体**という. 立体を貫通する穴を「孔」といい, 貫通しないである面を（または面の一部を）切り取ったものは単に「穴」といって区別するといいかもしれないが, 厳密に区別することなく, 単に「穴をあける」という表現で「貫通する孔をあける」意味で使われることが多い.



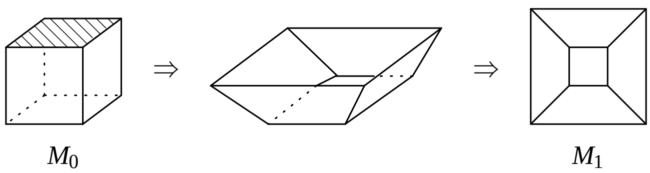
上図の (3) は穿孔多面体であり, さらに孔をあけると複雑な多面体がどんどんできる. それに対して (1) を「穴のあいていない多面体」という.

〖**定理 1.2**〗**オイラーの多面体公式** *Euler polyhedral formula*　穴のあいていない任意の多面体に対して, v を頂点 vertex の数, e を辺 edge の数, f を面 face の数とするとき, 等式 $v-e+f=2$ が成り立つ.

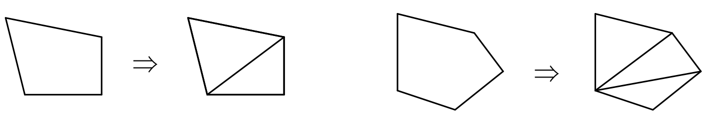
証明　多面体を M とおく. 以下の４段階に分けて証明する.

<u>第１段階</u>　M の一つの面を除くと穴のあいた多面体になるが, それを M_0 とおく. 穴のあいた面を広げて平面的な図形にし, それを M_1 とおく. M_0 と M_1 の間で v, e, f の個数とそれらの位置関係に変化はないので, M_1 について等式 $v-e+f=1$ を示せばよい.

具体的にたとえば６面体で説明すると, どこか一つの面（斜線部分）を取り除き, 残りの面・辺・頂点のつながり関係を保つように広げて, 平面的な図形にしたものを M_1 とする. この図形で関係式 $v-e+f=1$ が成り立っていることを示そうというのである.



<u>第２段階</u>　各面の形がさまざまであると面倒なのですべての面を三角形に分割する. 下図のように三角分割すると, 頂点の数は変わらず, 辺の数と面の数が増えるが, それらが増える数は同じなので, 証明すべき等式 $v-e+f=1$ は変わらない.

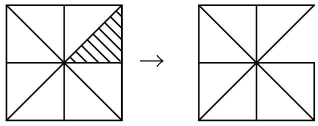


<u>第３段階</u>　複雑に三角分割された平面図形に対して, グラフの連結性を保ちながら, 外側から三角形を１つずつ消していく. このとき以下の３つの場合が考えられる.

(1) 右図の斜線部の三角形のように外部と１辺で接している場合,
この三角形を消すと面の数が１つ減るが, 同時に辺も１つ減るので,

$$v-e+f$$

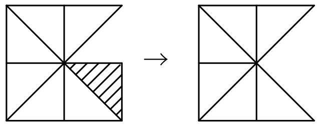
の値は変わらない.



(2) 右図の斜線部の三角形のように外部と２辺で接している場合,
　この三角形を消すと面の数が１つ減るが, 同時に頂点も１つ減り, 辺は２つ減るので,

$$v-e+f$$

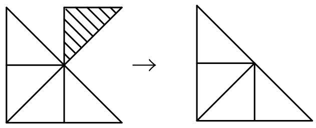
の値は変わらない.



(3) 右図の斜線部の三角形のように外部と３辺で接している場合,
　この三角形を消すと面の数が１つ減るが, 同時に頂点は２つ減り, 辺は３つ減るので,

$$v-e+f$$

の値は変わらない.



　この操作を繰り返してゆくと, 最後に一つの三角形だけになる.

第４段階　最後に三角形で考えると, $v-e+f=3-3+1=1$ となる.　//

☞ オイラーの多面体公式は, 彼の手紙（1750 年）に書かれていたのが歴史上最初であるという. さらに彼は 1752 年に不完全ながらその証明（多面体を４面体に分割する方法で）を発表した. ただし, デカルト（René Descartes, 1596–1650）やライプニッツ（Gottfried Wilhelm Freiherr von Leibniz, 1646–1716）など, 17〜18 世紀に活躍した著名な数学者たちも知っていたという説もある. その後, スイスのリュイリエール（Simon Antoine Jean L'Huilier, 1750–1840）という数学者がオイラーの多面体公式を完全な形で証明し, また, 穿孔多面体ではその公式は成立しないことを示した (1813 年) といわれている.

　多面体を（穿孔多面体も含め）拡張したものを閉曲面という. それらの図形について $v-e+f$ の値はその図形の特徴を示す重要な指標であり, 第３〜４章で詳しく議論する.

【定義 1.2】次の条件を満たす凸多面体を**正多面体** *regular polyhedron* という.

(1) すべての面は合同な正多角形である.

(2) どの頂点に集まる辺の数は等しい.

〖定理 1.3〗 正多面体は正四面体, 正六面体, 正八面体, 正十二面体, 正二十面体の５種類しかない.

証明 M は各面が正 m 角形の正多面体とし, その頂点・辺・面の数はそれぞれ v,e,f とする. ただし m は３以上の自然数である.

　各面は m 個の辺をもつので, 全体で辺の数は mf 個になるが, １つの辺は２つの面に共有されているので

$$mf=2e \quad \text{すなわち} \quad f=\frac{2e}{m} \quad \cdots ①$$

という関係がある. 各頂点に集まる辺の数を n（n も 3 以上の自然数）とすると, 全体で辺の数は nv 個になるが, １つの辺は２つの頂点を結んでいるので

$$nv=2e \quad \text{すなわち} \quad v=\frac{2e}{n} \quad \cdots ②$$

という関係がある. オイラーの公式 $v-e+f=2$ に①と②を代入すると

$$\frac{2e}{n}-e+\frac{2e}{m}=2 \quad \text{すなわち} \quad \frac{2}{n}+\frac{2}{m}-1=\frac{2}{e}$$

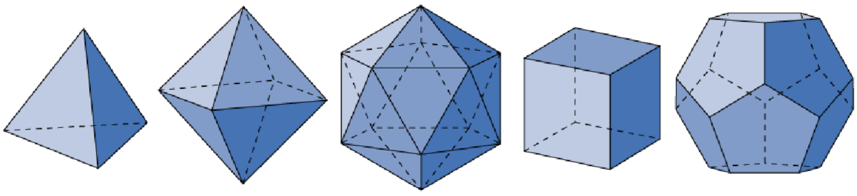
ここで $\frac{2}{e}>0$ だから $\frac{2}{n}+\frac{2}{m}-1>0$ であり,

$$2m+2n-mn>0 \quad \text{より} \quad (m-2)(n-2)<4$$

この関係式を満たす (m,n) の組を考えると

$$(3,3), \quad (3,4), \quad (3,5), \quad (4,3), \quad (5,3)$$

だけであることがわかる.　//

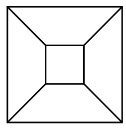


(3,3)	(3,4)	(3,5)	(4,3)	(5,3)
正４面体	正８面体	正２０面体	正６面体	正１２面体
regular tetrahedron	*regular octahedron*	*regular icosahedron*	*regular hexahedron*	*regular dodecahedron*

	名称	v	e	f	$v-e+f$	面の形
(3,3)	正４面体	4	6	4	2	正３角形
(4,3)	正６面体	8	12	6	2	正４角形
(3,4)	正８面体	6	12	8	2	正３角形
(5,3)	正１２面体	20	30	12	2	正５角形
(3,5)	正２０面体	12	30	20	2	正３角形

☞ 歴史的に, 正多面体が上の５種類しかないことを最初に書きしるしたのはプラトン（Plato, BC 428 頃〜BC 348 頃）であるといわれ, そのため正多面体を別名**プラトンの立体** *Platonic solid* ともいう. また, その立体が５種類しかないことの証明は, 紀元前３世紀頃に編纂されたユークリッド原論に書かれている. ただし, それは上の証明とは違うものである.

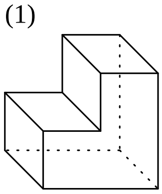
問 1.3 正６面体の一つ面を取り除いて平面的に広げると, 定理 1.2 の証明の第１段階で見たように右に示した図形になり, $v-e+f=8-12+5=1$ が成り立っている. 同じことをほかの４つの正多面体について考えると, それぞれどんな平面的な図形になるか. また $v-e+f=1$ が成り立っていることを確かめよ.



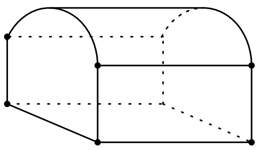
さらに, オイラーの多面体定理は, 曲がった多面体（辺が曲線だったり, 面が曲面だったりした多面体）についても成り立っていることに注意しよう.

問 1.4 下図のいろいろな多面体について, $v-e+f$ の値を調べよ.

(1)



(2)



(3)