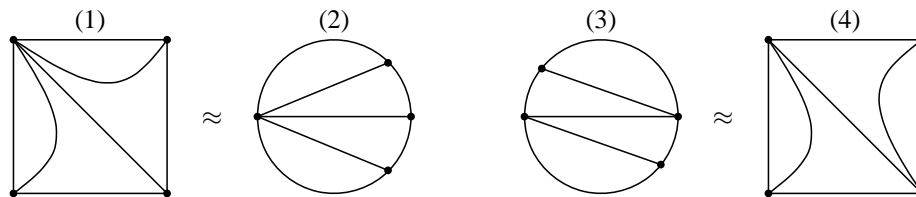


§ 1.3 連続的な変形と同一視

一筆書きの問題とオイラーの多面体公式を議論するとき、連続性 *continuity* という重要な考え方が使われている。頂点と頂点がどのくらい離れているか、または頂点と頂点が直線で結ばれているのか、それとも曲線で結ばれているのかは問題でなく、それぞれの頂点の位置関係が保たれるならば、その間の辺を適当に引き伸ばしたり、縮めたり、曲げたりしてもよいという考えである。それによって図形が変形しても、その図形が千切れたり破れたりしない限り問題ではないのである。

たとえば次の図形では v, e, f の数はどれも同じであるが、(1) と (2) は頂点、辺、面の位置関係が同じであり、連続的に (1) から (2) へ変形できる。その意味で 2 つのグラフを \approx という記号で結んで、同じ種類の図形であると考え。まったく同じことが (3) と (4) の間にも言うことができる。しかし (2) と (3) は位置関係が違うので連続的な変形で結びつけることができず、これらは別の種類の図形であると考えるのである。



このように図形を連続的に変形することを許して、同じ種類の図形かどうかを判別する指標を見つけ出すことが位相幾何学の最も重要なテーマである。この連続性については第 2 章できちんと定義して議論しよう

また、立体的な図形を考えると、それを平面的な図形に置き換えると分かりやすくなる。そのためには、定理 1.2 の証明の第 1 段階で考えたように、立体的な図形をある部分で切り開いて見るのがどうしても必要になる。このとき同一視 *identification* というもう一つの重要な考え方が使われる。たとえば世界地図を例にしてみよう。



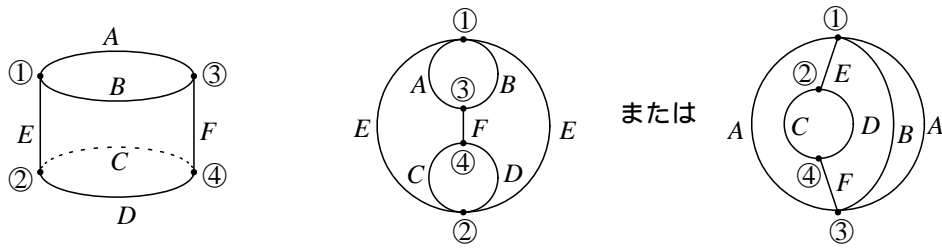
左右の端 (辺 ab) は境界 (世界の終り) ではなく、「やむを得ず切り離している」が「つながっている」ものと我々は理解している。すなわち、左右の辺 ab を同一視するのである。あるいは辺を「貼り合せる」と表現することもできる。また、切り離すところを変えると、右のように別の世界地図になるが大陸や島の位置関係は変わっていない。

さらに、どちらの場合でも北極と南極の点が引き伸ばされているので緯度が高くなるほど実際の面積より大きく見えている。しかしそのような歪みがあっても、球面という立体的な図形を平面的な図形に置き換えることで大陸や島の位置関係がわかりやすいというメリットがあるのである。

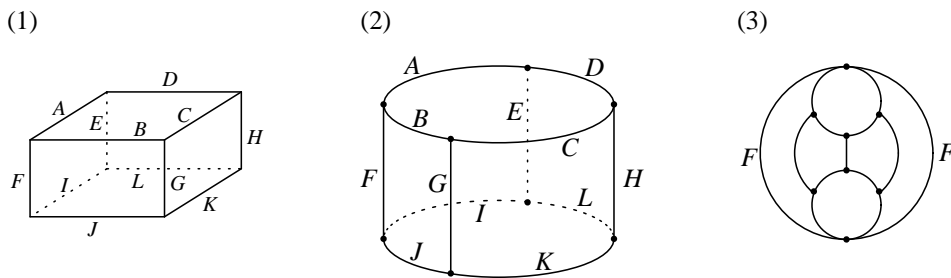


この同一視という考え方については第 3 章以降で詳しく議論するが、以下ここで「立体的な図形の一部を切り離し、連続的な変形により平面的な図形にして見る」という練習を少ししておこう。

例 1.1 問 1.4 (3) の図形について, 以下のように, 頂点を ①, ②, … と表し, 辺を A, B, C, \dots とする. その立体を各頂点と辺の位置関係を保持しながら連続的に平面上に展開すると, 下図右のようになる. 同じ名称の辺は同一視する (貼り合せる) ものとする.

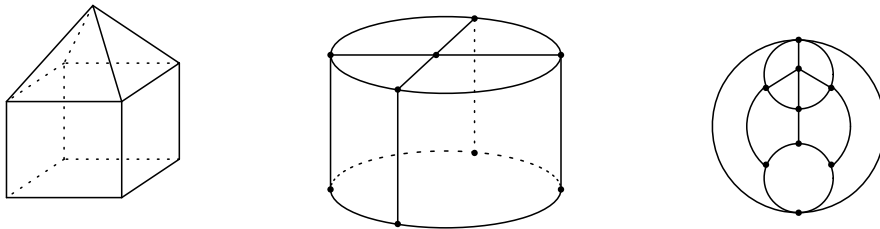


問 1.5 6 面体に対して, 下図 (1) のように辺 A から L まで名前を付け, 各頂点と辺の位置関係を保持しながら連続的に変形すると (2) のようになる. さらに辺 F を同一視する展開図を考えると (3) のようになる.

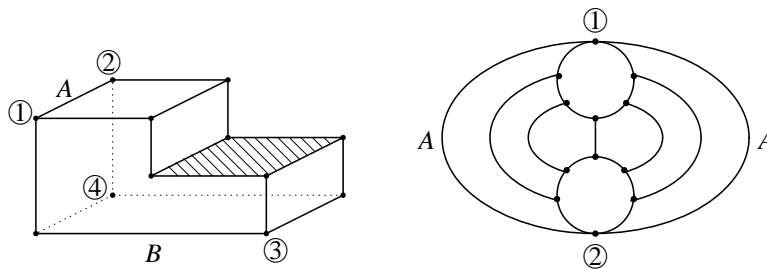


上の展開図 (3) に, 辺 F 以外の辺 A から L までの名称を書き入れよ. 頂点の名称は付けなくてよい.

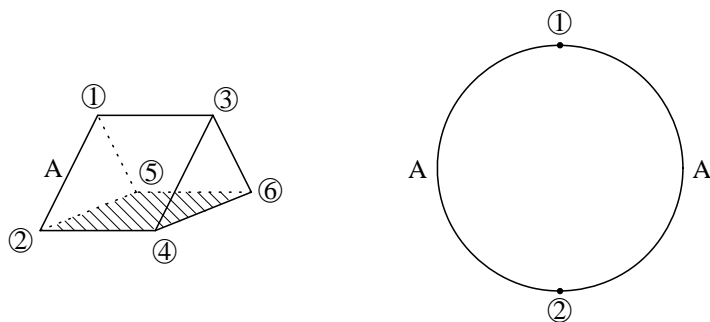
問 1.6 下図左のような立体がある. 各頂点と辺の位置関係を保持しながら連続的に変形すると下図中央のようになる. ある一つの辺を同一視する展開図を描くと, 下図右のようになる. それぞれの図で辺の位置を確認せよ.



問 1.7 下図左の立体がある. 辺 A を同一視し, 連続的な変形をすることで下図右のような平面上の図形になる. 下図左における辺 B , 頂点 ③, ④ は下図右ではどこにあるか記入せよ. また斜線で示した面は下図右ではどこにあるか斜線を入れて示せ.



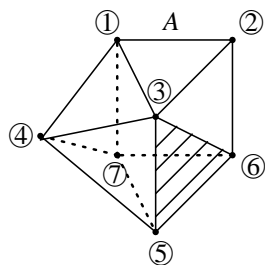
問 1.8 下図左のような立体がある. 2 点 ① と ② を結ぶ辺 A で切り開いて連続的に変形し, 下図右のような展開図にする. この円内に頂点 ③ ~ ⑥ とそれらを結ぶ辺を書き入れよ. また斜線部に相当する面には同様に斜線を入れて示すこと.



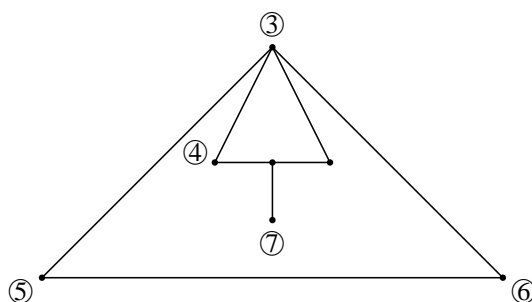
問 1.9 <図 1>の立体について、<図 2>は斜線部の面を取り去って連続的に変形し、平面図にしたものであり、また<図 3>は2頂点①と②を結ぶ辺 A で切り開いて連続的に変形し、平面図にしたものである。

ただしどちらも頂点と辺が書き足りないので、それらを追加して図を完成させよ。また、図 3 においては、図 1 の斜線部に対応する面に斜線を入れよ。

<図 1 >



<図 2 >



<図 3 >

