第2章　位相空間

図形の辺や面を連続的に（切り離したり破いたりせずに）引き伸ばしたり曲げたりする変形について数学的な意味づけを考えよう. そのために最低限必要なものは何なのか, 本質的なものは何なのかについて深く考えてみよう. ここでは集合論の基本的な知識が必要である.

§2.1　近傍から開集合へ

まず, 解析学での関数の連続性を詳しく見ることから始めよう. それは次のように定義されている.

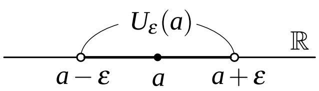
定義（ε-δ 論法）関数 $\varphi : W \to \mathbb{R}$（ここで $W \subset \mathbb{R}$）が点 $a \in W$ において**連続**であるとは, どんなに小さい任意の値 ε（ただし正とする）が提示されても, それに対応して十分に小さい値 δ（ただし正とする）を見出して,

$$|x-a| < \delta \;\Rightarrow\; |\varphi(x)-\varphi(a)| < \varepsilon$$

とすることができることをいう. このことを論理記号を用いて表すと次のようになる.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0\ \ s.t.\ |x-a| < \delta \;\Rightarrow\; |\varphi(x)-\varphi(a)| < \varepsilon \qquad \cdots\bigstar\ (2.1)$$

関数の連続性を簡単に言うと「点 a の近くに点 x があるならば, 点 $\varphi(x)$ は点 $\varphi(a)$ の近くにある」となる. ここで「近くにある点の集合」は「近傍」と呼ばれ, 次のように定義される.



定義（イプシロン近傍）　$U_\varepsilon(a) = \{\ x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < \varepsilon\ \}$

ここで $|x-a|$ は数直線 $\mathbb{R}$ 上の 2 点 a, x 間の距離であり, これを $d(a,x)$ と表すことにすると, 点 a のイプシロン近傍は

$$U_\varepsilon(a) = \{\ x \in \mathbb{R} \mid d(a,x) < \varepsilon\ \}$$

のように表すことができる. すると上の式★ (2.1) は次のように書き換えることができる.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0\ s.t.\ \varphi(U_\delta(a)) \subset U_\varepsilon(\varphi(a)) \qquad \cdots\bigstar\ (2.2)$$

点が近くにあるかどうかは**距離**を測ることで決まる. ここで連続についての議論からいったん離れて, **距離**というものについて改めて考え直してみよう. 一般に n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 内の 2 点 $a(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ と $b(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 間の距離は

$$d(a,b) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)^2} \qquad \textbf{ユークリッド距離}\ \textit{Euclidean distance}$$

と定義され, 以下の関係式を満たしている.

E1 :　$d(a,b) \geq 0 \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^n$　（等号が成り立つのは $a = b$ のとき）

E2 :　$d(a,b) = d(b,a)$

E3 :　$d(a,b) + d(b,c) \geq d(a,c)$　（三角不等式）

問 2.1 2次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ において, 2点間の距離は

$$d(a,b)=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}$$

であり, 上の関係式 E1, E2 は明らかであるので, $\mathbb{R}^2$ において, 関係式 E3 が成り立つことを証明せよ.

発想の転換をして, 関係式 E1, E2, E3 を満たすことが距離の本質であると考えると, 次のように一般の集合 X に距離を導入することができる.

【定義 2.1】 集合 X において, 次の3条件を満たす関数 $d: X\times X\to\mathbb{R}$ があるとき, d を**距離** *metric*（または *distance function*）といい, X を**距離空間** *metric space* という.

D1 :　$d(a,b)\geq 0 \quad \forall a,b\in X$　（等号が成り立つのは $a=b$ のとき）

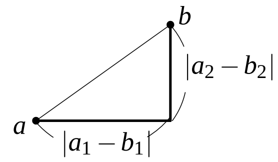
D2 :　$d(a,b)=d(b,a)$

D3 :　$d(a,b)+d(b,c)\geq d(a,c)$　（三角不等式）

この3条件を**距離の公理** *axioms of a metric* という.

例 2.1 平面 $\mathbb{R}^2$ において, 2点間の距離を

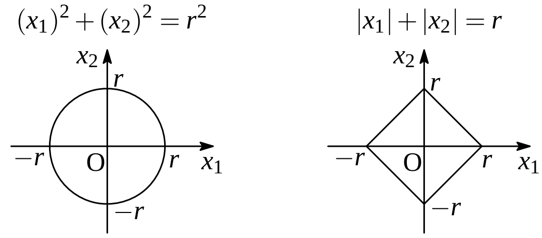
$$d(a,b)=|a_1-b_1|+|a_2-b_2|$$



のように定めると, これは距離の公理を満たす. これを**マンハッタン距離** *Manhattan distance* という. これは左図のように, 直角三角形の底辺の長さと高さを合計したものである. それに対して, ユークリッド距離はその三角形の斜辺の長さである.

問 2.2 マンハッタン距離が距離の公理を満たすことを示せ. **D**1 と **D**2 は明らかであるので, **D**3 が成り立つことを示すだけでよい.

例 2.2 距離の定義式が違えば図形も違ったものになる. たとえば, 円は「中心と呼ばれる定点からの距離が一定である点の軌跡」であるが, 原点を中心として半径 r の円をかくと, ユークリッド距離の場合は下図左であり, マンハッタン距離の場合は下図右になる.



問 2.3 ユークリッド距離を $d_E(a,b)$, マンハッタン距離を $d_M(a,b)$ と表すことにする. 2点 $a(-2,6),b(1,2)$ があるとき, 次の問に答えよ.

(1) $d_E(a,b)$ と $d_M(a,b)$ を求めよ.

(2) 次の集合を図示せよ.

$$A=\left\{\, x\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, d_E(a,x)=2 \,\right\},\quad B=\left\{\, x\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, d_M(b,x)=2 \,\right\}$$

問 2.4 マンハッタン距離は平面 $\mathbb{R}^2$ だけでなく, 一般に $\mathbb{R}^n$ において定義できる. $\mathbb{R}^3$ におけるマンハッタン距離の定義式を書け. また, 原点から一定の距離にある点の集合はどのような図形であるか考えよ.

問 2.5 平面 $\mathbb{R}^2$ において, ユークリッド距離による近傍を $U_\varepsilon(a)$ とし, マンハッタン距離による近傍を $V_\delta(a)$ と表すとする. 任意の $U_\varepsilon(a)$ に対して, $V_\delta(a)\subset U_\varepsilon(a)$ となる δ が存在すること, 逆に, 任意の $V_\delta(a)$ に対して, $U_\varepsilon(a)\subset V_\delta(a)$ となる ε が存在することを示せ.

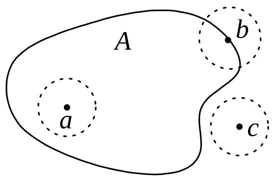
議論を「辺や面を連続的に伸ばしたり曲げたりしてもよい. そのために最低限必要なものは何か」という話に戻る準備が整ってきた. 例 2.2 を振り返ると, 距離の定義によって円の形が違っている. しかし連続的な変形を許せば, ○は◇になり, 逆に◇は○になる. このことから距離の束縛から離れて位置関係を考え直す必要があることになる. 言い換えると, 近いところにある点の集合を「近傍」でなく「開集合」に置き換えて空間を考え直すことである.

以下, おもに $\mathbb{R}^2$ 上でユークリッド距離をもとに議論を進めるが, それは一般次元の $\mathbb{R}^n$ でも同様である.

【定義 2.2】 部分集合 $A \subset \mathbb{R}^2$ があるとき, 点 $a \in A$ が**内点** *interior point* であるとは

$$\exists \varepsilon > 0 \ s.t. \ U_\varepsilon(a) \subset A$$

となること. 点 a が集合 A の**外点** *exterior point* であるとは,「点 a が補集合 $\mathbb{R}^2 \setminus A$ の内点である」こと. 内点でも外点でもない点を**境界点** *boundary point* という.



左図のように集合 A と点 a, b, c を考え, それぞれの近傍を点線で囲まれた円で示すと,

- ▷ $U_\varepsilon(a) \subset A$ だから a は A の内点である.
- ▷ $U_\varepsilon(c) \subset \mathbb{R}^2 \setminus A$ だから c は A の外点である.
- ▷ $U_\varepsilon(b) \subset A$ でもなく, $U_\varepsilon(b) \subset \mathbb{R}^2 \setminus A$ でもないので b は A の境界点である.

【定義 2.3】 $\mathbb{R}^2$ の部分集合 A が**開集合** *open set* であるとは, A に属する点はすべて内点であること. すなわち,

$$\forall a \in A, \ \exists \varepsilon > 0 \ s.t. \ U_\varepsilon(a) \subset A$$

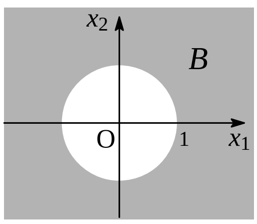
開集合の補集合を**閉集合** *closed set* という.

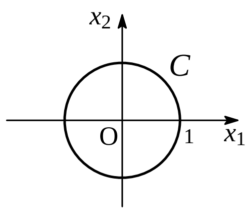
問 2.6 次のことを確認せよ.

(1) 開区間 $L = \{ \, x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \, \}$ は $\mathbb{R}^1$ の開集合である.

(2) 1 点 $a \in \mathbb{R}^2$ だけから成る集合 $A = \{ \, a \, \}$ は開集合ではなく, 閉集合である. また, 点 a は A の境界点である.

(3) $B = \{ \, x(x_1, x_2) \mid (x_1)^2 + (x_2)^2 > 1 \, \}$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合であり, その境界点の集合は円周 $C = \{ \, x(x_1, x_2) \mid (x_1)^2 + (x_2)^2 = 1 \, \}$ である.





☞ 以後, $\mathbb{R}^n$ の開集合族を $\mathscr{O}$ と表すことにする.

問 2.7 次のことを証明せよ. ただし $A \cap B \neq \emptyset$ とする.

(1) $A, B \in \mathscr{O} \ \Rightarrow \ A \cup B \in \mathscr{O}, \ \ A \cap B \in \mathscr{O}$

(2) 閉集合族を $\mathscr{C}$ と表すとき

$$A, B \in \mathscr{C} \ \Rightarrow \ A \cup B \in \mathscr{C}, \ \ A \cap B \in \mathscr{C}$$

これにより, 有限個の開集合 $A_1, A_2, \cdots A_n$ について, その和集合 $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ も共通部分 $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ も開集合であることが導かれるが, 無限個の場合は

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathscr{O} \quad \cdots ☆ \qquad\qquad \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathscr{O} \quad \cdots ★$$

☆は成り立つが, ★は必ずしも成り立つとは限らない.

例 2.3 $\mathbb{R}^1$ において

$$A_k = \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; -\frac{1}{k} < x < \frac{1}{k} \,\right\} \qquad (k \in \mathbb{N})$$

を考えると, $A_k \in \mathscr{O}$（$k \in \mathbb{N}$）であるが, $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \{\, 0 \,\} \notin \mathscr{O}$ となるから, ★は成り立たない.

問 2.7 では $A \cap B \neq \emptyset$ としたが, $\emptyset \in \mathscr{O}$ と決めておけばこの前提条件は不要となる. また, 明らかに $\mathbb{R}^n$ 自身は開集合だから $\mathbb{R}^n \in \mathscr{O}$ である. 以上の議論をまとめると, 次のようになる.

〖**定理 2.1**〗$\mathbb{R}^n$ の開集合族 $\mathscr{O}$ は次の性質をもつ.

(1) $\emptyset \in \mathscr{O}, \quad \mathbb{R}^n \in \mathscr{O}$

(2) $A_1, A_2, \cdots, A_m \in \mathscr{O} \;\Rightarrow\; \displaystyle\bigcap_{i=1}^{m} A_i \in \mathscr{O}$ （有限個数）

(3) $A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{O} \;\Rightarrow\; \displaystyle\bigcup_{k} A_k \in \mathscr{O}$ （有限または無限和）

上の定理 2.1 の 3 つの性質だけを最低限必要な要件として, 次の 2.2 節以降で新しい幾何学（いわゆる「やわらかい幾何学」とも称される**位相幾何学**）を考えていこう. ユークリッド幾何学はその幾何学の一分野に位置づけられることになる.