§2.2　位相空間

前節の定理 2.1 で, $\mathbb{R}^n$ の開集合族 $\mathscr{O}$ が持つ性質を見たが, その性質を十分条件として議論を始めよう.

【定義 2.4】一般に集合 X についてその部分集合から成る集合族 $\mathscr{A}$ を考えたとき, 次の 3 条件が満たされるならば X を**位相空間** *topological space* といい, $\mathscr{A}$ をその**開集合系**という. また $\mathscr{A}$ に属する部分集合を**開集合** *open set* という.

$$\textbf{T1}: \quad \emptyset \in \mathscr{A}, \quad X \in \mathscr{A}$$

$$\textbf{T2}: \quad A_1, A_2, \cdots, A_m \in \mathscr{A} \ \Rightarrow \ \bigcap_{i=1}^{m} A_i \in \mathscr{A}$$

$$\textbf{T3}: \quad A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{A} \ \Rightarrow \ \bigcup_{k} A_k \in \mathscr{A}$$

ここで, **T**2 は有限個の部分集合に対する条件であり, **T**3 は有限個または無限個の部分集合に対する条件である. 上の 3 条件を**開集合の公理** *axioms of open sets* という. このとき「開集合系 $\mathscr{A}$ によって集合 X に位相を入れる」ということもある.

☞ このように, 集合に対して開集合系という構造を与えることで生まれる位相空間を研究の対象とするのが**位相幾何学**である.

そのとき集合 X を**空間**と呼び, 開集合系 $\mathscr{A}$ とペアにして, より正確に $(X, \mathscr{A})$ または $X = (X, \mathscr{A})$ と表すことがある. 同じ集合 X に対して, もし別の開集合系 $\mathscr{B}$ を考えるならば $X = (X, \mathscr{B})$ はまったく別の空間として扱う. 特に, $\mathbb{R}^n$ は常にユークリッド距離による近傍と開集合系 $\mathscr{O}$ を考えた位相空間 $(\mathbb{R}^2, \mathscr{O})$ として扱うものとする.

例 2.4　集合 $X = \{\ 1, 2, 3\ \}$ について考える.

(1) $\mathscr{A} = \{\ \emptyset, X, \{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}\ \}$ とすると, $(X, \mathscr{A})$ は位相空間である.

(2) $\mathscr{B} = \{\ \emptyset, X, \{1,2\}, \{2,3\}\ \}$ とすると, $(X, \mathscr{B})$ は位相空間でない.

解 (1) 開集合の公理が満たされることを確認する. 条件 **T1** は明らかだから, 条件 **T2** と **T3** が満たされるかどうかを調べる. そのために $A_1 = \{1\}, A_2 = \{1,2\}, A_3 = \{1,3\}$ とおいて, 右の表を作ってみると分かりやすい. 部分集合の和 $\cup$ と積 $\cap$ について集合族 $\mathscr{A}$ は閉じていることが分かり, したがって $(X, \mathscr{A})$ は位相空間である.
(2) 否定するには, 反例となるものを一つ示すだけでよい. たとえば $A_2 \cap A_3 = \{2\}$ であるが $\{2\} \notin \mathscr{B}$ だから, 集合族 $\mathscr{B}$ は開集合の公理のうち条件 **T2** を満たさず, したがって $(X, \mathscr{B})$ は位相空間でない.

$\cap$ \ $\cup$	A_1	A_2	A_3
A_1		A_2	A_3
A_2	A_1		X
A_3	A_1	A_1	

☞ 一般に X が有限集合でない場合には, 上の例のように表を作って簡単に調べることはできない.

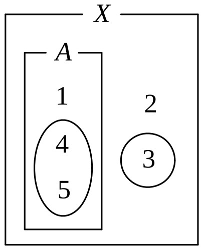
位相空間 $X = (X, \mathscr{A})$ において, その部分集合 $A \subset X$ があるとき, A の内点, 外点, 境界点の定義は定義 2.2 と同じである.

【定義 2.5】 位相空間 $X = (X, \mathscr{A})$ において, 部分集合 $A \subset X$ があるとき, 点 a が A の**内点** *interior point* であるとは

$$\exists U \in \mathscr{A} \ \ s.t.\ a \in U \subset A$$

となること. 点 a が集合 A の**外点** *exterior point* であるとは,「点 a が補集合 $X \setminus A$ の内点である」こと. 内点でも外点でもない点を**境界点** *boundary point* という.

<u>**例 2.5**</u> 集合 $X=\{1,2,3,4,5\}$ に対して, 開集合系 $\mathscr{A}=\{\emptyset,X,\{1,2,3\},\{3,4,5\},\{3\},\{4,5\}\}$ を定め, 位相空間とするとき, 部分集合 $A=\{1,4,5\}$ の内点, 外点, 境界点を調べよう.



解 点 1 の場合, $1\in U\subset A$ となる開集合 U は $\mathscr{A}$ の中にないから内点ではない. したがって 1 は A の境界点である. 点 4 の場合, $U=\{4,5\}\in\mathscr{A}$ とすると, $4\in U\subset A$ となるので, 4 は A の内点である. 同様に 5 も A の内点である. 一方, $X\setminus A=\{2,3\}$ であり, 点 2 の場合, $2\in U\subset X\setminus A$ となる開集合 U は $\mathscr{A}$ の中にないから, 2 は A の外点ではない. したがって 2 は A の境界点である. 点 3 の場合, $U=\{3\}\in\mathscr{A}$ とすると, $3\in U\subset X\setminus A$ となるので, 3 は A の外点である. //

一般の位相空間においても, 開集合の補集合を**閉集合** *closed set* という. $X=X\setminus\emptyset$ また $\emptyset=X\setminus X$ という関係から, 全体集合 X と空集合 $\emptyset$ は開集合でもあり閉集合でもある.

<u>**例 2.6**</u> 集合 $X=\{1,2,3\}$ について, 上の例 2.4(1) の開集合系 $\mathscr{A}$ を考えるとき, 閉集合をすべて求めよ.

解 X と $\emptyset$ 以外の各開集合の補集合を考えると

$$X\setminus\{1\}=\{2,3\},\quad X\setminus\{1,2\}=\{3\},\quad X\setminus\{1,3\}=\{2\}$$

したがって, 閉集合は $X,\emptyset,\{2\},\{3\},\{2,3\}$ の 5 つである. //

【定義 2.6】位相空間 $X=(X,\mathscr{A})$ において, 全体集合 X と空集合 $\emptyset$ 以外に「開集合でもあり閉集合でもある」部分集合はないとき X は**連結** *connected* であるという. 逆に, **非連結** *disconnected* であるとは

$$\exists A,B\in\mathscr{A}\ s.t.\ A\neq\emptyset\ \wedge\ B\neq\emptyset\ \wedge\ A\cap B=\emptyset\ \wedge\ A\cup B=X$$

が成り立つことである.

<u>**例 2.7**</u> 集合 $X=\{1,2,3\}$ について,

(1) $\mathscr{A}=\{\emptyset,X,\{1\},\{1,2\},\{1,3\}\}$ とすると, $(X,\mathscr{A})$ は連結な位相空間である.

(2) $\mathscr{B}=\{\emptyset,X,\{1\},\{2,3\}\}$ とすると, $(X,\mathscr{B})$ は非連結な位相空間である.

<u>**例 2.8**</u> ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2=(\mathbb{R}^2,\mathscr{O})$ は連結な位相空間である. 一般に n 次元のユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ も同様である.

問 2.8 $X=\{a,b,c,d\}$ は $\mathscr{A}=\{\emptyset,X,A_1,A_2,A_3,A_4\}$ を開集合系とする位相空間である. ここで $A_1=\{a,b\}$ とする. 残りの部分集合 A_2,A_3,A_4 を定めよ. そのとき X は連結か, または非連結か.

【定義 2.7】位相空間 $X=(X,\mathscr{A})$ の部分集合 W に対して

$$\mathscr{A}_W=\left\{ A\cap W \,\middle|\, A\in\mathscr{A} \right\}$$

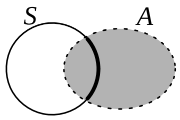
とすれば, $\mathscr{A}_W$ は開集合の公理を満たすから, $(W,\mathscr{A}_W)$ は位相空間となる. これを**部分位相空間**という. または簡単に**部分空間** *subspace* という.

問 2.9 定義 2.7 の $\mathscr{A}_W$ が開集合の公理を満たすことを証明せよ.

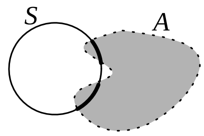
今後 $\mathbb{R}^2$ における幾何学的図形（円, 三角形, 四角形など）を考えるとき, それを単なる点の集合としてでなく, $(\mathbb{R}^2,\mathscr{O})$ の部分位相空間として扱う.

<u>**例 2.9**</u> $\mathbb{R}^2$ 上の円を S と表し, $(\mathbb{R}^2,\mathscr{O})$ の部分位相空間とする. すなわち $S=(S,\mathscr{O}_S)$ とするとき, $\mathscr{O}_S$ に属する開集合とはどんな図形であるか考えよう. ただし, ここで円 S は, 内部を含めない境界線だけの図形とする.

解 S の開集合は, 下図のように, ある開集合 $A \in \mathscr{O}$ との共通部分 $S \cap A$（円弧の一部で図の太い部分）である.

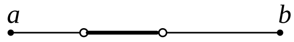


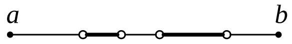
または



など　//

☞ 円 S をある 1 点で切り, 線分（ただし両端 a と b を同一視）と見るとき, S の開集合はこの線分内のいくつかの開区間から成るものと考えることができる.





【定義 2.8】 位相空間 $X = (X, \mathscr{A})$ の部分集合 W に対して

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \supset W \qquad U_\alpha \in \mathscr{A} \qquad (A \text{ は加算集合であるとは限らない})$$

となるとき, 集合族 $\mathscr{U} = \left\{ U_\alpha \right\}_{\alpha \in A}$ は W を**被覆** *cover* するという. 部分集合 W が**コンパクト** *compact* であるとは, 任意の被覆 $\mathscr{U} = \left\{ U_\alpha \right\}_{\alpha \in A}$ に対して, $\mathscr{U}$ から有限個の $U_1', U_2', \cdots, U_m'$ を選びとって, W を被覆できること, すなわち $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{m} U_k' \supset W$ とできることをいう. このとき $\left\{ U_1', U_2', \cdots, U_m' \right\}$ を $\mathscr{U}$ の**有限部分被覆**という.

例 2.10 $\mathbb{R}^1$ において, 開区間 $(0,1)$ はコンパクトでない.

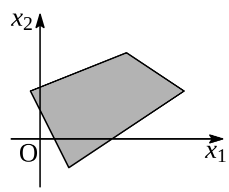
解 $I = (0,1)$ とおく. たとえば開集合

$$U_n = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{1}{n+1} < x < \frac{n+1}{2n} \right\} \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

を考えると $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \supset I$ であるが, $U_1, U_2, U_3, \cdots$ の中から有限個の U_n をどのように選んでとっても, I を被覆できないからである.　//

例 2.11 $\mathbb{R}^1$ において, 閉区間 $[a,b]$ はコンパクトである. その証明は「コンパクトでないと仮定するとカントールの区間縮小法の原理を用いて矛盾が生じる」ことで得られるが省略する.

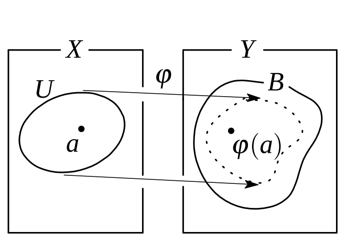
一般に $\mathbb{R}^n$ において, 有界な閉集合であることとコンパクトであることは同値であり, **ハイネ・ボレルの被覆定理**と呼ばれている.



$\mathbb{R}^2$ 内では, たとえば右図上のように, 境界線で囲まれた集合は有界な閉集合でありコンパクトである. このようにコンパクトな集合とは境界線で囲まれた集合をイメージすればよい. あるいは境界線だけの集合（囲まれた内部は除く）でもよい. また境界線は直線だけでなく一般に曲線でよい.

$\mathbb{R}^3$ 内では, コンパクトな集合とはいくつかの面で囲まれた集合をイメージすればよい. たとえば平面で囲まれた正多面体がそうである. また曲面で囲まれた球や右図下のような立体なども有界な閉集合でありコンパクトである. これらの図形についても表面（境界面）だけでもいいし, また内部を含めてイメージしてもよい.

一般に, 2 つの集合 X, Y があり, 一つの点 $a \in X$ に対して一つの点 $b \in Y$ が対応しているとき, その対応を**写像** *mapping* という. 写像を φ と表すとき, その対応関係を $\varphi : X \to Y$ と表し, また $\varphi(a) = b$ と表す.



関数の連続性は近傍を使って定義されているが, 位相空間では近傍のかわりに開集合を使うので書き直してみよう. §2.1 の式★ (2.2) の続きである. 位相空間 $(X, \mathscr{A})$ と $(Y, \mathscr{B})$ の間に写像 $\varphi : X \to Y$ があるとすると, 点 $a \in X$ において φ が連続であるためには,

$$\forall B \in \mathscr{B} \left\{ \varphi(a) \in B \right\}, \; \exists U \in \mathscr{A} \left\{ a \in U, \;\; \varphi(U) \subset B \right\}$$

でなければならない. ここで $\varphi^{-1}(B) = \{\ x \in X \mid \varphi(x) \in B\ \}$ とおくと, 点 a が $\varphi^{-1}(B)$ の内点であることを求めている. 一点における連続性でなく空間 X 全体で考えると, 任意の開集合 $B \in \mathscr{B}$ について原像 $\varphi^{-1}(B)$ が開集合であることが求められていることになる.

☞ ここで φ^{-1} は逆写像のことではなく, $\varphi^{-1}(B)$ は単に集合 B の原像のこととする. 逆写像についてはあとで考える.

ここまで来て, ようやく距離という絶対的な物差しから自由になり, 位相空間の写像 $\varphi : X \to Y$ が連続であることの定義に到達できた.

【定義 2.9】 位相空間 $X = (X, \mathscr{A})$ から位相空間 $Y = (Y, \mathscr{B})$ への写像 $\varphi : X \to Y$ が**連続**であるとは

$$\forall B \in \mathscr{B},\ \ \varphi^{-1}(B) \in \mathscr{A}$$

が成り立つことをいう.

例 2.12 位相空間 $X = (X, \mathscr{A})$ と $Y = (Y, \mathscr{B})$ が次のようにあるとする.

$$X = \{\ 1,2,3,4\ \},\quad \mathscr{A} = \{\ \emptyset, X, \{1\}, \{2,3\}, \{1,4\}, \{1,2,3\}\ \}$$
$$Y = \{\ a,b,c\ \},\quad \mathscr{B} = \{\ \emptyset, Y, \{a\}, \{b,c\}\ \}$$

(1) 写像 $\varphi : X \to Y$ を

$$\varphi(1) = a,\quad \varphi(2) = b,\quad \varphi(3) = c,\quad \varphi(4) = a$$

と定めると, φ は連続である. なぜなら, Y のすべての開集合について調べると

$$\varphi^{-1}(\{a\}) = \{1,4\} \in \mathscr{A},\quad \varphi^{-1}(\{b,c\}) = \{2,3\} \in \mathscr{A},\quad \varphi^{-1}(Y) = X \in \mathscr{A}$$

となるからである.

(2) 写像 $\psi : X \to Y$ を

$$\psi(1) = b,\quad \psi(2) = a,\quad \psi(3) = c,\quad \psi(4) = a$$

と定めと, ψ は連続でない. なぜなら, $\psi^{-1}(\{a\}) = \{2,4\} \notin \mathscr{A}$ だからである.

☞ 連続であることを示すにはすべての開集合について調べなければならないのに対して, 連続でないことを示すには反例を一つあげればよい. また空集合 $\emptyset$ に対しては常に $\varphi(\emptyset) = \emptyset$, $\varphi^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ とする.

問 2.10 X は例 2.12 の位相空間とし, Y は

$$Y = \{\ a,b,c\ \},\quad \mathscr{B} = \{\ \emptyset, Y, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}\ \}$$

として写像 $\varphi : X \to Y$ を考えるとき, 連続なものと連続でないものを例示せよ.

問 2.11 連続写像 $\varphi : X \to Y$ と $\psi : Y \to Z$ があるとき, 写像 $\Phi : X \to Z$ を $\Phi(x) = \psi(\varphi(x))$ と定めるならば, Φ も連続であることを証明せよ.