§3.2　オイラー標数

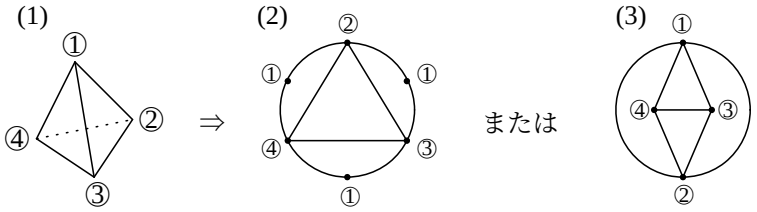
ここから第４章終りまで, 曲面を平面的な図形に置き換えて議論する方法を考えよう. 頂点を①,②,$\cdots$ と表し, 辺を $a, b, \cdots$ のように表す. また, 頂点の数を v, 辺の数を e, 面の数を f と表すことにする.

例 3.6 正４面体の平面的な図形（展開図）をかいて, オイラーの多面体公式を再確認しよう.

解 正４面体 (1) を平面的な図形に切り開いて連続的に展開すると下図 (2) または (3) のようにいろいろ考えられる.

(2) 頂点は 6 個あるように見えるが, 同じ番号の点は同一視するので実際は 4 個である. 辺についても①と②を両端にもつ辺は同一視するので, 異なる辺の数は 6 個である. 面の数は 4 個である. したがって $v-e+f=4-6+4=2$ となる.

(3) 頂点と面の数は図の通りで, それぞれ 4 個ずつである. 辺は 7 個あるように見えるが, 頂点①と②を結ぶ左右の外周は同一視するので, 異なる辺の数は 6 個である. したがって $v-e+f=4-6+4=2$ となる.



一般に, 単純閉曲線上に有限個の頂点が並んだ図形を**多辺形**ということにしよう. すると上の例では, 図 (2) は６辺形の内部を４つの３辺形に分割したものであり, 図 (3) は２辺形の内部を４つの３辺形に分割したものである.

問 3.2 §1.3 の問 1.5, 問 1.6, 問 1.7 の展開図においてどのような多辺形があるか調べよ. またそれぞれについて $v-e+f$ の値を調べよ.

いろいろな曲面を平面上の多辺形に置き換え, 頂点や辺の同一視に注意しながら, $v-e+f$ の値を求めることを考えよう. このとき統一的に議論ができるように, オイラーの多面体定理（定理 1.2）の証明で考えたように, 多辺形の内部をすべて三角形に分割する. それは次のように定義されている.

【定義 3.1】 曲面 M の有限個の部分集合族 $\{\triangle_1, \triangle_2, \cdots, \triangle_n\}$ があり, 条件

D1 : 各 $\triangle_i$ は三角形と同相

D2 : $\triangle_1 \cup \triangle_2 \cup \cdots \cup \triangle_n = M$

D3 : 任意の $\triangle_i, \triangle_j$ に対して, 共通部分 $\triangle_i \cap \triangle_j$ は次のどれかに限る.
「空集合 $\emptyset$」 または 「一つの共通の頂点」 または 「一つの共通の辺」

を満たすとき, M は**三角分割可能**であるという.

曲面 M を三角分割し, 頂点の個数, 辺の個数, 面の個数をそれぞれ v, e, f としたとき, $v-e+f$ の値を曲面 M の**オイラー標数** *Euler characteristic* といい, $\chi(M)$ と表す.

☞ オイラー標数を「オイラー数」と呼ぶ本もある. ただしオイラー数 *Euler number* と呼ばれるまったく別のものがあり, 混同しないように, **標数** *characteristic* という用語を使う. 記号 χ はギリシア文字で「カイ」と読む.

同相な曲面は同じ三角分割をもつことになるので次の重要な定理が成り立つ.

〖**定理 3.1**〗　$M_1 \approx M_2 \;\Rightarrow\; \chi(M_1) = \chi(M_2)$

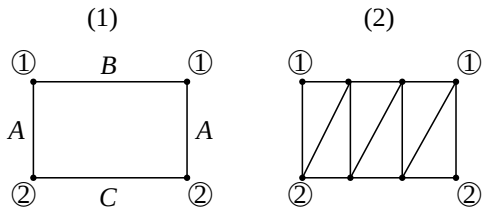
この定理から「オイラー標数が異なる曲面は同相でない」と結論付けることができる.

以下, 代表的な曲面について三角分割とオイラー標数を考えてみよう. まず, 閉曲面でないアニュラス An とメビウスの帯 Mb の場合について考える.

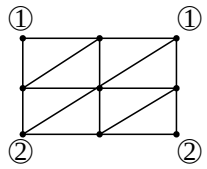
例 3.7　$\chi(An)=0$

解 例 3.2 で見たようにアニュラス An は右図 (1) のように４辺形で表すことができる. ここで同じ番号の頂点は同一視され, また①と②を結ぶ辺も同一視される. この状態で数えると, $v-e+f=2-3+1=0$ である.

右図 (2) は頂点と辺を加えて, 三角分割したものであり, やはり $v-e+f=6-12+6=0$ である.



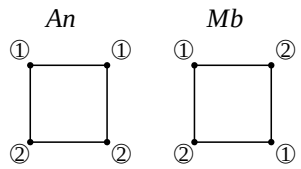
問 3.3 円柱面 An について, 上の例 3.7 の図 (1) から, 右図のような三角分割を考えたとする. しかしこれは正しい三角分割になっていないことを調べよ. ただしそれでも $v-e+f=0$ となる. それを確かめよ. さらに面の形が三角形でないものを含む分割をいろいろ考え $v-e+f$ を求め, オイラー標数は変らないことを確かめよ.



問 3.4 上の問を一般化して, なぜ正しい三角分割になっていない場合でも, 面の形が三角形でないものがあっても, $v-e+f$ の数はオイラー標数と変らないのか考えよ.

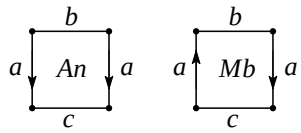
曲面を三角分割しない多辺形で表すとき, 同一視する頂点の位置関係を示すことでその曲面の立体的な形がわかる. たとえばアニュラス An とメビウスの帯 Mb の多辺形の図を比較すると, 右図のようになる.

ただしここからは以下の方針のもとで, 頂点は脇役にして, 辺を主役にして議論を進める.



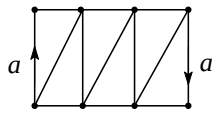
(i) 辺に名前 $a,b,c,\cdots$ をつけ, これを**ラベル**と呼ぶ.
(ii) 同一視する辺には同じラベルを付け, 貼り合せる方向を矢印で示す. また貼り合せることで, その辺は境界でなくなる.
(iii) 単独のラベルが付いた辺は境界である.

そうすると, 円柱面とメビウスの帯の多辺形は右のようになる. これを曲面の**多辺形モデル**という. 同一視する辺だけを強調するとき, 境界となる辺のラベルを省略することがある.



例 3.8　$\chi(Mb)=0$

解 上のメビウスの帯の多辺形モデルと問 3.4 により, $\chi(Mb)=2-3+1=0$ とわかるが, 右図のように三角分割すると $\chi(Mb)=6-14+8=0$ となる.



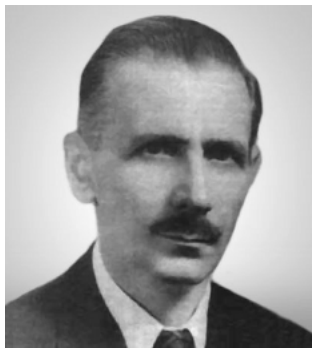
次に, 本題である閉曲面について三角分割とオイラー標数を調べよう. この問題に関連して重要な人物がいるので, 紹介しておこう.

ラドー（Tibor Radó, 1895〜1965）はハンガリー生まれの数学者で, 1929 年にアメリカに移住し, プラトーの問題を解決するなど多くの業績を残した. 一般に, 閉曲面を三角分割できるかどうかは簡単な問題ではなく, 1952 年にラドーによって肯定的に解決された.

パパキリアコプーロス（Christos Dimitrios Papakyriakopoulos, 1914〜1976）はギリシアの数学者で,1943 年にオイラー標数は三角分割の仕方によらない位相不変量であること（基本予想）を証明した. 三角分割の仕方によって v,e,f の値が変り, したがって $\chi(M)$ も変るのではないかと疑問をもつかもしれないが, そのようなことはないのである.

ヒーウッド（Percy John Heawood, 1861〜1955）はイギリスの数学者で四色問題に一生を捧げた. トーラスの場合は７色で色分け可能なことを示した. 閉曲面の三角分割について「ヒーウッドの不等式」と呼ばれる関係式を示した.

ラドー



パパキリアコプーロス

ヒーウッド

〖**定理 3.2**〗（ラドーの定理）任意の閉曲面は三角分割可能である.

これにより閉曲面は有限個の 3 辺形を貼り合せてできたものということになり, 具体的に球面 S^2 やトーラス T^2 などは「いくつの 3 辺形を, どのように貼り合せればできるのか」が問題となる.

また, 三角分割を考えるとき, 頂点の数はできるだけ少ない方がよいが, いくらでも少なくできるわけではない.

〖**定理 3.3**〗（ヒーウッドの不等式）閉曲面 M のオイラー標数を χ とする. 三角分割したとき, 頂点の数を v とすると次の不等式が成り立つ.

$$v^2-7v+6\chi \geq 0$$

証明 辺の数を e, 面の数を f とすると, まず明らかに

$$v>3 \quad \text{かつ} \quad e \leq \binom{v}{2} \qquad \cdots(1)$$

であり, 定義より

$$v-e+f=\chi \qquad \cdots(2)$$

である. 辺と面の個数の関係を考えると, 閉曲面では各辺はちょうど 2 つの面に含まれ, 各面がちょうど 3 つの辺を含むことから

$$2e=3f \qquad \cdots(3)$$

である. (2) と (3) から $v-\dfrac{1}{3}e=\chi$ となり, さらに (1) から $v-\chi \leq \dfrac{1}{3}\binom{v}{2}=\dfrac{v(v-1)}{6}$ となり, $v^2-7v+6\chi \geq 0$ が得られる. //

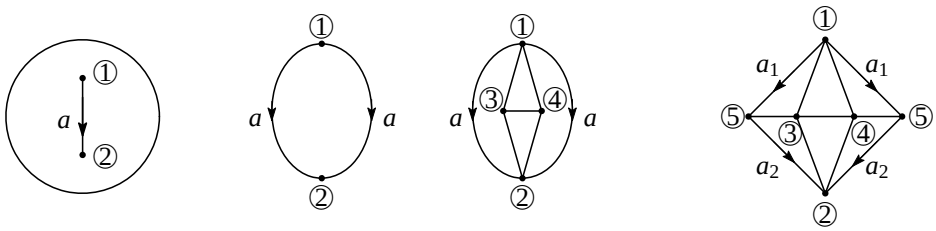
例 3.9　$\chi(S^2)=2$

解 球面は正 4 面体と同相だから, 例 3.6 より $\chi(S^2)=4-6+4=2$ である. または, 次のように考えることもできる.

(1) 球面上に適当に 2 点①と②をとり, 切り込みを入れる.

(2) 切り開いて穴を広げ, 平面上に伸ばすと例 3.6 で見た 2 辺形ができる.

(1)　⇒　(2)　⇒　(3) 2 辺形　または　(4) 4 辺形



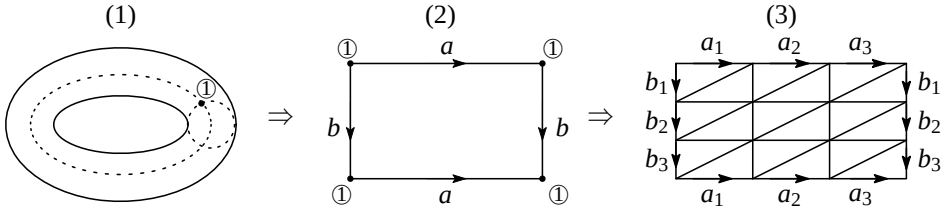
(3) 2 辺形の内部に 2 つの頂点③ ④をとると, $\chi(S^2)=4-6+4=2$ となる.

(4) または辺 a の途中に頂点⑤をとって 4 辺形にし, 三角分割すると, $\chi(S^2)=5-9+6=2$ となる. //

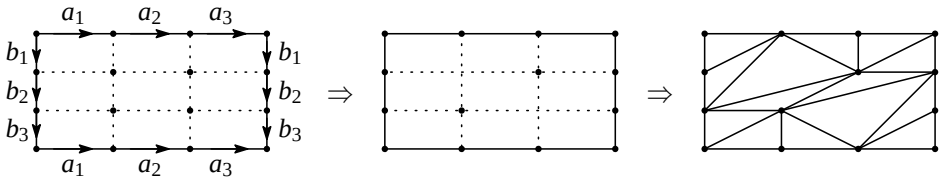
☞ S^2 の場合, 定理 3.3 より $v^2-7v+12\geq 0$ であり, 三角分割に必要な頂点の数は $v\geq 4$ であることがわかる. 上の例では (3) が $v=4$ のときである.

例 3.10　$\chi(T^2)=0$

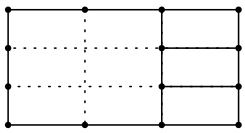
解 トーラスの下図 (1) において, 点①のところで十文字に（点線に沿って）切り開いて 4 辺形モデル (2) を作る. これを (3) のように三角分割すると $\chi(T^2)=9-27+18=0$ となる. //



ここでは 9 つの頂点をとって三角分割したが, 定理 3.3 より $v^2-7v\geq 0$ だから, 三角分割に必要な頂点の数は最低 7 つである. 上の例の (3) の図を参考に, ちょうど 7 つの頂点でトーラス T^2 を三角分割することを考えてみよう. まず 9 つの頂点を残し, 内部の辺を消してしまうと下図の左のようになる. さらに内部の 4 つの点のうち 2 つを消すと中央のようになる. 例 3.10 の図 (3) の辺を一部利用して, 内部の頂点と周囲の点とを結ぶことで下図の右の三角分割が得られる. このとき $v-e+f=7-21+14=0$ となる. トーラス T^2 の場合, 頂点の数をこれよりも少なくして三角分割することはできない.



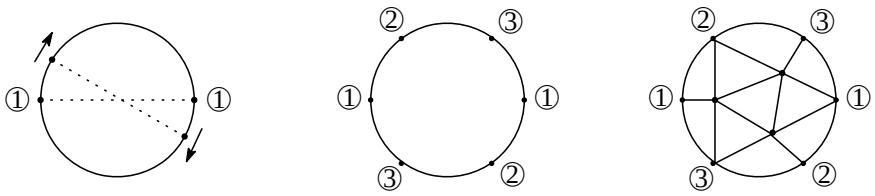
問 3.5 上の例で頂点の数を $v=7$ にする説明において内部の点 4 つのうち 2 つ消すとき, 右図のように考えることもできる. また, 実線で表した辺を残すとする. この状態で三角分割を完成せよ.



例 3.11　$\chi(P^2)=1$

解 射影平面 P^2 は例 3.5 で説明したように, 平面上の円盤 D^2 の境界 S^1 上の原点対称の位置にある 2 点を同一視して得られる閉曲面である. 下図 (2) のように 6 辺形モデルを作り, (3) のように三角分割すると $\chi(P^2)=6-15+10=1$ となる. //

(1) 2 辺形モデル　　(2) 6 辺形モデル　⇒　(3) 三角分割



定理 3.3 より $v^2-7v+6\geq 0$ であり, 三角分割に必要な頂点の数は 6 つ以上である. したがって上図 (3) の三角分割は頂点の数が最も少ないものである.

問 3.6 上の例の説明図は頂点の番号で同一視するところを示しているが, 頂点を使わず矢印付きの辺のラベルで図示せよ. また, 2 辺形モデルと 4 辺形モデルの図（三角分割はしなくてよい）も示し, それぞれの場合で $v-e+f$ の値を求めよ.