§4.2　語の演算

ここからは閉曲面を対象に, 多辺形の図を使う説明を, 語の演算を用いる議論に置き換えることを考えよう. 辺のラベルが大文字 $A, B, C, \cdots$ の場合は「単独の辺, または複数の辺をまとめたもの, または無すなわちまったく辺のない空っぽのもの」を表すとする. なお混乱を避けるために単独の辺のラベルに e, f, g, v, w の小文字は使わないことにする.

【定義 4.2】　$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

例 4.8　球面の４辺形モデルの語より, $S^2 = abb^{-1}a^{-1} = ab(ab)^{-1}$ だから, ここで $x = ab$ とおくと, ２辺形モデルの語 $S^2 = xx^{-1}$ になる.

〘**定理 4.2**〙語の演算則１

(1) $(a^{-1})^{-1} = a$

(2) $Axx^{-1} \approx A$　（A は空でないとする）

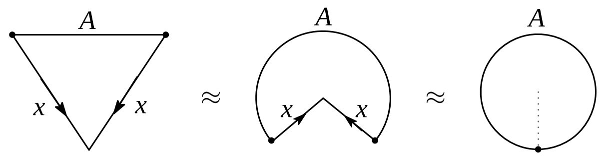
(3) $A = a_1a_2\cdots a_n$ とするとき,

$$A = a_2a_3\cdots a_na_1 = a_3a_4\cdots a_na_1a_2 = \cdots = a_na_1a_2\cdots a_{n-1}$$
$$A^{-1} = a_n^{-1}\cdots a_2^{-1}a_1^{-1} \approx A.$$

(4) $A = a_1a_2\cdots a_n\,, B = b_1b_2\cdots b_m$ とするとき,

$$AB = a_1a_2\cdots a_n\,b_1b_2\cdots b_m = a_2\cdots a_n\,b_1b_2\cdots b_m\,a_1 = \cdots = b_1b_2\cdots b_m\,a_1\cdots a_n = BA$$

証明　(2) を説明する. 下図のように, 辺 x を貼り合せることで, 隣り合う x と x^{-1} は消えて語は A だけとなる.



☞ 曲面の名称と語を区別なく使っていることに注意. 命題を正確に言うならば, (2) の場合は「Axx^{-1} を語とする曲面を M_1 とし, A を語とする曲面を M_2 とするならば, $M_1 \approx M_2$ である」と, また (3) の場合は「A を語とする曲面を M_1 とし, A^{-1} を語とする曲面を M_2 とするならば, $M_1 \approx M_2$ である」と書くべきであるが, 煩雑になるので上のように簡略して書いている.

例 4.9　球面の場合 $S^2 = abb^{-1}a^{-1}$ であるが, ここで bb^{-1} が消えて $S^2 = aa^{-1}$ となる.

例 4.10　上の演算則から次の結果が得られる. （n は自然数）

(1) $nT^2 = \underbrace{a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}}_{T^2}\underbrace{a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}}_{T^2}\cdots\cdots\underbrace{a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1}}_{T^2}$

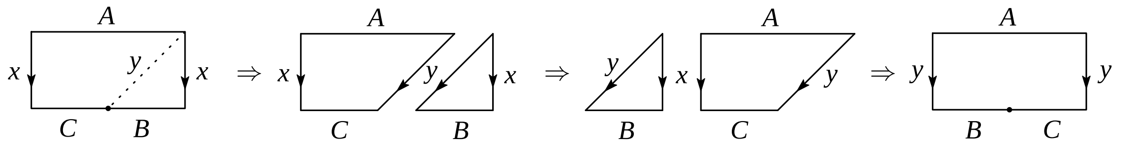
(2) $nP^2 = \underbrace{a_1a_1}_{P^2}\underbrace{a_2a_2}_{P^2}\cdots\cdots\underbrace{a_na_n}_{P^2}$

〘**定理 4.3**〙語の演算則２（A, B, C は空でないとする）

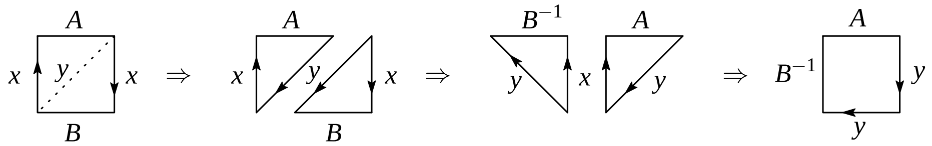
(1) $AxBCx^{-1} \approx AxCBx^{-1}$　（**アニュラス演算**）

(2) $AxBx \approx AxxB^{-1}$　（**メビウス演算**）

証明 (1) 図のようにアニュラスの辺のラベル順を変えることができる. 最後の 5 辺形のラベル y を改めて x と書き直す.



(2) 図のようにメビウスの帯の辺のラベル順を変えることができる. 最後の 4 辺形のラベル y を改めて x と書き直す.



☞ 定理 4.3 の 2 種類の演算則は重要であり, たとえば次のように図解するなどしてしっかり覚えよう. ある辺 x に着目して,「$x=\triangle$ と $x^{-1}=\triangledown$」または「$x^{-1}=\triangle$ と $x=\triangledown$」と見て以下の式変換をすればよい. 上の証明で式変換の流れを強調して「ならば矢印 ⇒」で示しているが「同相 ≈」の意味である.

- アニュラス演算則：△と▽に挟まれた辺 BC は交換できる

  $A \triangle BC \triangledown \quad \Rightarrow \quad A \triangle CB \triangledown$

- メビウス演算則：△と△に挟まれた辺 B は向きを変えて外に（うしろに）出せる. 背負い投げ

  $A \triangle B \triangle \quad \Rightarrow \quad A \triangle\triangle B^{-1}$

  または, △△と並んだ後ろの辺は逆向きにして間に挟むことができる. 押さえ込み

  $A \triangle\triangle B \quad \Rightarrow \quad A \triangle B^{-1} \triangle$

例 4.11 次の関係式を語の演算で示せ.

(1) $ab^{-1}ca^{-1}c^{-1}b \approx T^2$ 　　(2) $abc^{-1}a^{-1}cb \approx P^2\#Kb$

解 (1) アニュラス演算則を適用する.

$$
\begin{aligned}
ab^{-1}ca^{-1}c^{-1}b &= (a)b^{-1}(c)(a^{-1}c^{-1})b \\
&= (a)b^{-1}(a^{-1}c^{-1})(c)b \\
&\approx ab^{-1}a^{-1}(c^{-1}c)b \\
&\approx ab^{-1}a^{-1}b = T^2
\end{aligned}
$$

(2) メビウス演算則を適用する.

$$
\begin{aligned}
abc^{-1}a^{-1}cb &= (a)b(c^{-1}a^{-1}c)b \\
&\approx (a)bb(c^{-1}a^{-1}c)^{-1} \\
&= (a)bb(c^{-1}ac) \\
&= (bb)(c^{-1}aca) = P^2\#Kb
\end{aligned}
$$

☞ 呼び方について

アニュラス演算と**メビウス演算**でなく, アニュラス操作とメビウス操作と言ってもよいが, これらの名称は必ずしも広く一般に定まったものではない. しかし語の演算をするとき, 非常に重要な方法（操作）であり, それぞれ向き付け可と不可の場合に応じて必須のものである.

テキストによっては, **円筒演算**と**メビウス演算**と呼んだり, また別の象徴的な意味で**ハンドル操作**と**クロスキャップ操作**と呼ぶものもある.

例 4.12 　$Kb \approx 2P^2$ 　（定理 4.1）

解 メビウス演算則を適用すると $P^2\#P^2 = aabb = abba \approx aba^{-1}b = Kb$ //

向き付け可能な曲面と不可能な曲面を連結させると, どんな曲面になるのだろうか？これは非常に興味深い問題であり, また重要な問題でもある. 向き付け可能でもなく不可能でもないという奇妙な曲面になるのだろうか？もしそうだとすれば, 曲面がもつ固有の性質には, オイラー標数と向き付け可能性のほかに第 3 の特性があることになり, それは何かという問題が発生することになる. しかしそのようなことはなく, 向き

付け可能な曲面と不可能な曲面を連結させると, 向き付け可能な部分は消滅して, 不可能な曲面になるのである. その根拠となるのは次の重要な定理である.

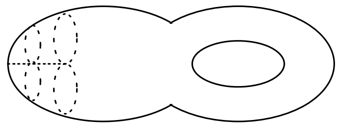
〖**定理 4.4**〗　射影平面 P^2 とトーラス T^2 を連結させると, それは射影平面 P^2 にクラインの壺 Kb を連結させた曲面になる. すなわち

$$P^2\#T^2 \approx P^2\#Kb$$

このようにトーラス T^2 は消滅して, $P^2\#T^2 \approx 3P^2$ となる.

証明 メビウス演算則を適用する.

$$\begin{aligned} P^2\#T^2 &= (cc)(aba^{-1}b^{-1}) = (a^{-1}b^{-1})cc(ab) \\ &\approx (a^{-1}b^{-1})c(b^{-1}a^{-1})c \\ &= (a^{-1}ca^{-1})b^{-1}(c)b^{-1} \\ &\approx (a^{-1}ca^{-1})b^{-1}b^{-1}c^{-1} \\ &= (c^{-1}a^{-1}ca^{-1})(b^{-1}b^{-1}) = Kb\#P^2 \end{aligned}$$

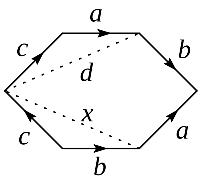


$P^2\#T^2$

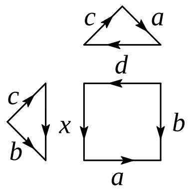
☞ 多辺形モデルの図を使って証明することもできる. ただし以下の図は上の証明をそのまま図に置き換えたものではないことに注意.

例 3.13 で見たように, 連結和 $P^2\#T^2$ は下図 (1) の 6 辺形で表される. そこに点線で示した新しい辺 d と x を入れて, 図 (2) のように切り離す. 3 つのピースを図 (3) のように辺 b 同士と c 同士とを貼り合わせる.

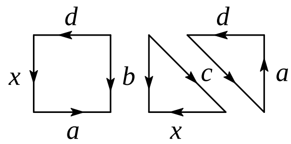
(1)



(2)

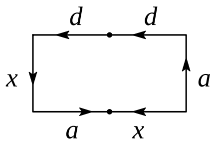


(3)

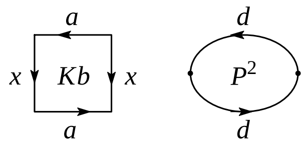


すると図 (4) のように一つの 6 辺形にまとまるが, これは図 (5) の $a^{-1}xa^{-1}x^{-1} \approx Kb$ と $d^{-1}d^{-1} \approx P^2$ との連結和である.

(4)



(5)



問 4.5 例 4.11 と例 4.12 について, 語の演算でなく図を使って証明せよ.

問 4.6 次の関係式を語の演算則 1 または演算則 2 を用いて示せ.

(1) $abca^{-1}b^{-1}c \approx 3P^2$　(2) $abca^{-1}b^{-1}c^{-1} \approx T^2$　(3) $abca^{-1}c^{-1}b^{-1} \approx T^2$

(4) $abacbc \approx 3P^2$　(5) $abca^{-1}cb \approx 2P^2$

問 4.7 次の閉曲面を語の演算則 1 または演算則 2 を用いて, それと同相な nT^2 または nP^2 の形（n は自然数）で表せ. なお関係式 $P^2\#T^2 \approx P^2\#Kb$（定理 4.4）と $Kb \approx 2P^2$（定理 4.1）は使ってよいとする.

(1) $abcbac$　(2) $abcba^{-1}c$　(3) $abxd^{-1}ba^{-1}dyxy$

(4) $abcb^{-1}dc^{-1}d^{-1}a^{-1}$　(5) $aba^{-1}cdb^{-1}c^{-1}d^{-1}$

問 4.8 次の関係式を導け.（m,n は自然数とする）

(1) $mT^2\#nP^2 \approx (n+2m)P^2$　(2) $\chi(mT^2\#nP^2) = 2-n-2m$