

§ 4.3 閉曲面の分類定理

閉曲面 M の多边形モデルは偶数個の辺を持ち、ラベル $a_1, a_2, \dots, a_n, a_1^{-1}, a_2^{-1}, \dots, a_n^{-1}$ の列で表される。その多边形の語の長さすなわち辺の個数を $w(M)$ のように、また複数の辺をまとめて A とするとき辺の長さを $w(A)$ のように表すとする。最小の多边形モデルは次の 2 種類の 2 边形である。

$$S^2 = aa^{-1} \text{ (向き付け可)} \quad P^2 = aa \text{ (向き付け不可)}$$

したがって

$$w(M) = 2 \Rightarrow M \approx S^2 \text{ または } M \approx P^2$$

である。次に小さい多边形モデルは 4 边形であるが、ラベルの配列を考えると次の 5 種類しかない。

- 向き付け可の場合 : (1) $aa^{-1}bb^{-1} \approx aa^{-1} = S^2$ (2) $aba^{-1}b^{-1} = T^2$
- 向き付け不可の場合 : (3) $aabb = P^2 \# P^2$ (4) $abab \approx P^2$ (5) $abab^{-1} = Kb \approx P^2 \# P^2$

ただし例 4.8 または例 4.9 で見たように、本質的な意味で 4 边形であるのは (2) と (3) だけである。したがって

$$w(M) = 4 \Rightarrow M \approx T^2 \text{ または } M \approx 2P^2$$

である。

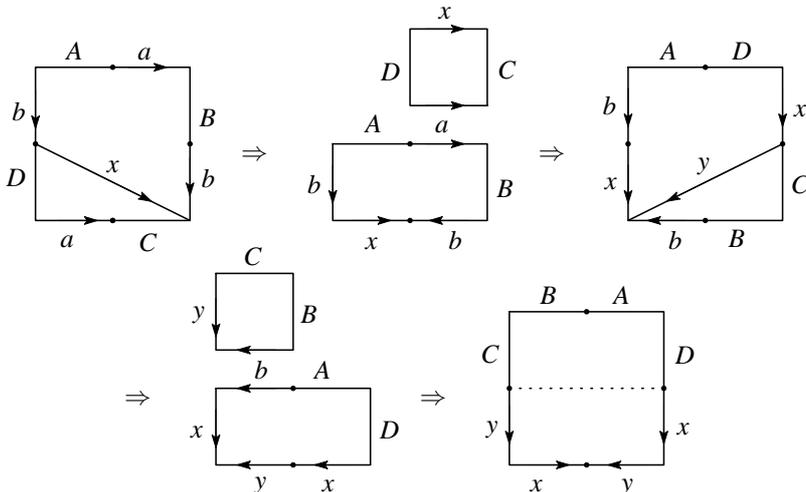
もっと長い語について考えてみよう。このとき、次の定理は重要である。

【定理 4.5】 $AaBbCa^{-1}Db^{-1} \approx ADCBaba^{-1}b^{-1} = (ADCB) \# T^2$

証明 アニュラス演算則を使うと

$$\begin{aligned} AaBbCa^{-1}Db^{-1} &= Aa(B)(bC)a^{-1}Db^{-1} \\ &\approx Aa(bC)(B)a^{-1}Db^{-1} \\ &= Aab(CB)(a^{-1}D)b^{-1} \\ &\approx Aab(a^{-1}D)(CB)b^{-1} \\ &= ba^{-1}DCBb^{-1}Aa \\ &= ba^{-1}(DCB)(b^{-1}A)a \\ &\approx ba^{-1}(b^{-1}A)(DCB)a \\ &= aba^{-1}b^{-1}ADCB \\ &= T^2 \# (ADCB) \end{aligned}$$

参考までに、図で説明する別証明を与えておこう。まず辺 x で切り離して辺 a を貼り合わせる。次に辺 y で切り離して辺 b を貼り合わせる。



【定理 4.6】向き付け可能な閉曲面は球面 S^2 であるかまたは n 個のトーラスの連結和 nT^2 と同相である。

【証明】 M は向き付け可能な閉曲面とし、定理 4.2 (2) に該当する辺をすべて取り除いていくものとする。 $w(M) = 2$ または $w(M) = 4$ の場合については上で見たとおりなので、 $w(M) \geq 6$ とする。すると

$$M = Aa_1Ba_1^{-1}C = a_1Ba_1^{-1}CA \quad B \neq \emptyset$$

と表すことができる。このような表現は辺 a_1 の取り方によっていくつか考えられるが、 $w(B)$ の値が最小になる辺 a_1 を選ぶものとする。次に B から一つの辺 b_1 を選び取ると、 b_1^{-1} は CA に含まれている。なぜなら、もし b_1^{-1} が B に含まれているなら a_1 を選んだ理由に反するからである。すると

$$B = B_1b_1B_2 \quad CA = D_1b_1^{-1}D_2 \quad M = a_1B_1b_1B_2a_1^{-1}D_1b_1^{-1}D_2$$

となるが、定理 4.5 により

$$M \approx (D_2D_1B_2B_1)(a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}) \approx M_1\#T^2 \quad M_1 = D_2D_1B_2B_1 \quad w(M_1) \leq w(M) - 4$$

となる。ここで M_1 に対して同様に考えれば

$$M_1 \approx M_2a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1} \quad M \approx M_2\#2T^2$$

となり、この操作を続ければ、 $M \approx nT^2$ が得られる。 //

☞ 上の証明の操作を見れば「向き付け可能な閉曲面の場合、 S^2 の場合を除き、多边形モデルの辺の個数は 4 の倍数であり、ラベルの列 $aba^{-1}b^{-1}$ の繰り返しになる」ことがわかる。なお、4 辺ずつ切り離してゆくと、最後に 2 辺が残るように思うかもしれないが、残ったとしてもそれは xx^{-1} なので問題ない。

次に、向き付け不可能な閉曲面の場合を考えよう。

【定理 4.7】向き付け不可能な閉曲面は n 個の射影平面の連結和 nP^2 と同相である。

【証明】 M は向き付け不可能な閉曲面とするとその多边形モデルの語には少なくとも 1 組の a と a の辺があるので $M = AaBa$ とおくと、メビウス演算則により

$$M \approx AaaB^{-1} = (B^{-1}A)aa \approx M_1\#P^2 \quad M_1 = B^{-1}A \quad w(M_1) \leq w(M) - 2$$

である。ここで M_1 が向き付け可能ならば前の定理 4.6 により $M_1 \approx mT^2$ となるので、

$$M \approx (mT^2)\#P^2$$

であるが、さらに定理 4.4 によりすべての T^2 が消滅して $M \approx nP^2$ の形となる。

M_1 が向き付け不可能ならば上と同様に考えると、 $M \approx M_2\#P^2\#P^2$ となる。この議論を続けてゆくと、ある自然数 n により $M \approx nP^2$ となる。 //

定理 4.6 と定理 4.7 をまとめると、次の表ようになる。空欄は、そのような閉曲面は存在しないことを意味する。このように閉曲面の分類はオイラー標数と向きづけ可能性という 2 つの固有の特性により完結する。別の言い方をすると、境界を持たないコンパクトな 2 次元の多様体の分類は、多边形モデルの語の演算というアイデアによって見事に解決したのである。

オイラー標数	向き付け可能	向き付け不可能
2	S^2	
1		P^2
0	T^2	$2P^2 \approx Kb$
-1		$3P^2$
-2	$2T^2$	$4P^2$
\vdots	\vdots	\vdots

球面でない閉曲面 M は n 個のトーラスの連結和か、または n 個の射影平面の連結和であるので、その個数を種数 *genus* と呼び、記号 g で表すとして、すなわち

$$g(M) = \begin{cases} \frac{2 - \chi(M)}{2} & \text{向きづけ可能な場合} \\ 2 - \chi(M) & \text{向きづけ不可能な場合} \end{cases}$$

である。すると閉曲面は種数と向きづけ可能性によって次の表のように分類されるということもできる。

種数 g	向き付け可能	向き付け不可能
0	S^2	
1	T^2	P^2
2	$2T^2$	$2P^2$
3	$3T^2$	$3P^2$
\vdots	\vdots	\vdots

⇨ 種数とは、向き付け可能な閉曲面の場合は球面 S^2 にあけられた穴の個数 ($g = 0$ すなわち穴がないのが S^2) であり、向き付け不可能な閉曲面の場合は S^2 につけられたクロスキャップの個数を意味するということもできる。すると、位相幾何学的には、茶碗と球面は、また、コーヒーカップとトーラスはそれぞれ同じ種類の図形である。



例 4.13 $g(T^2 \# P^2) = 3$

解 定理 4.4 より $T^2 \# P^2 \approx 3P^2$ だから

$$g(T^2 \# P^2) = 2 - \chi(3P^2) = 2 - (-1) = 3$$

問 4.9 次の関係式を導け。 $g(mT^2 \# nP^2) = 2m + n$ (m, n は自然数)

問 4.10 次の種数を求めよ。

- (1) $g(4T^2 \# 2S^2)$ (2) $g(2T^2 \# 6P^2)$ (3) $g(6T^2 \# 2P^2)$

球面 S^2 , トーラス T^2 , 射影平面 P^2 , クラインの壺 Kb についてオイラー標数と種数の関係式をまとめておこう。 m, n は自然数とする。

- | | | |
|--------------------------------------|------------------|----------------------------|
| (1) $\chi(S^2) = 2$ | ⇨ 例 3.9 | $g(S^2) = 0$ |
| $\chi(T^2) = 0$ | ⇨ 例 3.10 | $g(T^2) = 1$ |
| $\chi(P^2) = 0$ | ⇨ 例 3.11 | $g(P^2) = 1$ |
| (2) $\chi(mS^2) = 2$ | ⇨ 例 3.14, 定理 3.7 | $g(mS^2) = 0$ |
| $\chi(mT^2) = 2 - 2m$ | ⇨ 定理 3.7 | $g(mT^2) = m$ |
| $\chi(nP^2) = 2 - n$ | ⇨ 定理 3.7 | $g(nP^2) = n$ |
| $\chi(Kb) = \chi(2P^2) = 0$ | ⇨ 定理 4.1 | $g(Kb) = 2$ |
| $\chi(T^2 \# P^2) = \chi(3P^2) = -1$ | ⇨ 定理 4.4 | $g(T^2 \# P^2) = 3$ |
| $\chi(mT^2 \# nP^2) = 2 - 2m - n$ | ⇨ 問 4.8 | $g(mT^2 \# nP^2) = 2m + n$ |

～ まとめ ～

現代の位相幾何学（トポロジー）の研究対象はおもに多様体であるが、一般にその分類は未解決である。1次元の場合は単純であり、境界の有無とコンパクト性の2つの特性により、次の4種類しかない。

	コンパクト	コンパクトでない
境界あり	閉区間 $[a, b]$	半直線 $[a, \infty)$ または半開区間 $[a, b)$
境界なし	円周 S^1	実数直線 \mathbb{R}^1 または開区間 (a, b)

2次元の場合は境界のないコンパクトな多様体（すなわち閉曲面）に限ると、上述のようにオイラー標数（または種数）と向き付け可能性の2つの特性により分類されるのである。しかもオイラー標数を種数に置き換えて見ると、その閉曲面の形状がどのようなものか説明できるのである。しかし境界がある場合、コンパクトでない場合については分からないことが多い。さらに、3次元以上の多様体については非常に難しい研究分野となっている。

多様体について詳しいことは第6章で学ぼう。その前に第5章では位相空間についてのいろいろな基本的性質や事項をきちんと議論する。多様体とは位相空間の一部だからである。